2.3 Divergenz, Rotation [Lang & Pucker 7.5]

Bausteine: Vektorfelder $[\nabla\phi(\vec r), \vec E(\vec r), \vec B(\vec r)]$ und Verknüpfungen
[Skalarprodukt $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, Vektorprodukt $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$].

Zur Erinnerung: Nabla ∇ ist ein „Vektoroperator": nimmt ein Skalarfeld $\phi(\vec r)\in\mathbb{R}$ und gibt ein Vektorfeld $\nabla\phi(\vec r)\in\mathbb{R}^3$; $\nabla = \sum_k \vec e_k \partial_k = \sum_k \vec e_k \frac{\partial}{\partial x_k}$;
$\nabla\phi(\vec r) = \sum_k \frac{\partial\phi}{\partial x_k}\vec e_k$ (Kapitel 2.1).

Wir wollen jetzt ∇ auf Vektorfelder operieren lassen, um deren Verhalten zu charakterisieren. Dieses kann mit Hilfe der neuen Verknüpfungen erreicht werden.

Definition Die Divergenz von $\vec E$ ist eine Ableitung $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$\nabla\cdot\vec E = \operatorname{div}\vec E := \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial E_k}{\partial x_k}.$$

Beispiel: $\vec E = z\,\vec e_x + xy\,\vec e_y + 2\,\vec e_z$

$$\nabla\cdot\vec E = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(2) = x.$$

Definition Die Rotation von $\vec E$ ist eine Ableitung $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\nabla\times\vec E = \operatorname{rot}\vec E := \begin{vmatrix}\vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3\\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3\\ E_1 & E_2 & E_3\end{vmatrix}. \qquad \begin{pmatrix}1\leftrightarrow x\\ 2\leftrightarrow y\\ 3\leftrightarrow z\end{pmatrix}$$

Beispiel: $\vec E = z\,\vec e_x + xy\,\vec e_y + 2\vec e_z$

$$\nabla\times\vec E = \begin{vmatrix}\vec e_x & \vec e_y & \vec e_z\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ z & xy & 2\end{vmatrix}$$

$$= \vec e_x\big(\underbrace{\partial_y(2)}_{=0} - \underbrace{\partial_z(xy)}_{=0}\big) + \vec e_y\big(\underbrace{\partial_z(z)}_{=1} - \underbrace{\partial_x(2)}_{=0}\big) + \vec e_z\big(\underbrace{\partial_x(xy)}_{=y} - \underbrace{\partial_y(z)}_{=0}\big)$$

$$= \vec e_y + y\,\vec e_z.$$

Bemerkung: ∇ wird wie ein normaler Vektor behandelt, außer der Tatsache dass Ableitungen immer von links operieren:

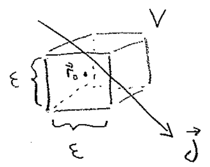
$$\underbrace{\partial_x f(x)}_{\text{richtig}} \neq \underbrace{f(x)\,\partial_x}_{\text{falsch}}$$

(Alternativ könnte man die Notation verfeinern, z.B. $\vec\partial_x f(x) = f(x)\overleftarrow{\partial}_x$.)

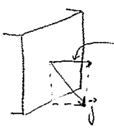
Die anschauliche („physikalische") Bedeutung der Divergenz

Betrachte eine „Strömung" durch ein kleines Volumenelement :

Wieviel „neue Strömung" entsteht innerhalb von V ?



* In die x-Richtung : $\overbrace{j_x(\vec{r}_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_x)}^{\text{kommt heraus}} - \overbrace{j_x(\vec{r}_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_x)}^{\text{geht hinein}}$



nur die Normalkomponente „kommt raus"

* In die y-Richtung: $j_y(\vec{r}_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_y) - j_y(\vec{r}_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_y)$
* In die z-Richtung: $j_z(\vec{r}_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_z) - j_z(\vec{r}_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_z)$

Insgesamt (Taylor) : $\varepsilon\,(\partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z) = \varepsilon\,\nabla\cdot\vec{j}$!

Eine Strömung mit der Eigenschaft $\nabla\cdot\vec{j} = 0$ heißt „quellenfrei".

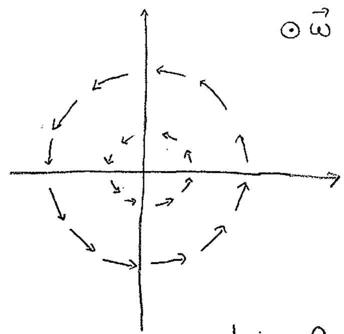
Beispiele:

* $\vec{j} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

$$\nabla\cdot\vec{j} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \partial_x(\omega_y z - y\omega_z) + \partial_y(\omega_z x - z\omega_x) + \partial_z(\omega_x y - x\omega_y)$$

$$= 0$$



„keine Quellen"

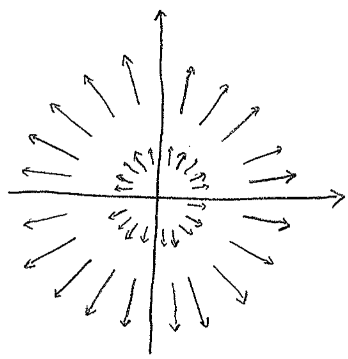
* $\vec{j} = \vec{r}$

$$\nabla\cdot\vec{j} = \nabla\cdot(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$

$$= \partial_x(x) + \partial_y(y) + \partial_z(z)$$

$$= 1+1+1$$

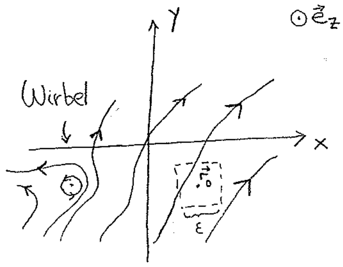
$$= 3.$$



„entsteht Strömung"

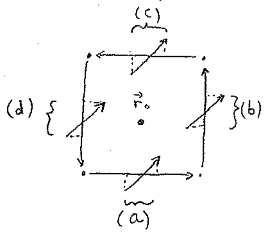
— · —

Die anschauliche („physikalische") Bedeutung der Rotation



Betrachte eine Strömung in einer Ebene $z = \text{const}$.
Wieviel „Wirbligkeit" weist die Strömung auf?

* Gehe um ein Viereck.
Wieviel Strömung „kommt mit"?



$$(a) = j_x(\vec{r}_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_y) \approx j_x - \tfrac{\varepsilon}{2}\partial_y j_x$$
$$(b) = j_y(\vec{r}_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_x) \approx j_y + \tfrac{\varepsilon}{2}\partial_x j_y$$
$$(c) = -j_x(\vec{r}_0 + \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_y) \approx -j_x - \tfrac{\varepsilon}{2}\partial_y j_x$$
$$(d) = -j_y(\vec{r}_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}\vec{e}_x) \approx -j_y + \tfrac{\varepsilon}{2}\partial_x j_y$$

Insgesamt (Taylor): $\varepsilon(\partial_x j_y - \partial_y j_x) = \varepsilon(\nabla\times\vec{j})_z$!

* Bei Ebenen in anderen Richtungen erhält man $\varepsilon(\nabla\times\vec{j})_x$, $\varepsilon(\nabla\times\vec{j})_y$; im Allgemeinen $\varepsilon(\nabla\times\vec{j})\cdot\vec{n}$, wobei $\vec{n}$ der Normalvektor ist.

Eine Strömung mit der Eigenschaft $\nabla\times\vec{j} = \vec{0}$ heißt „wirbelfrei".

Beispiele (vgl. Seite 16):

* $\vec{j} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

$$\nabla\times\vec{j} = \nabla\times(\vec{\omega}_c\times\vec{r})$$

halte $\vec{\omega}$ konstant; Ableitung operiert nur auf $\vec{r}$

Graßmann-Identität, Seite 14

$$= (\nabla\cdot\vec{r})\vec{\omega}_c - (\nabla\cdot\vec{\omega}_c)\vec{r} = \underbrace{(\nabla\cdot\vec{r})}_{3 \text{ (Seite 16)}}\vec{\omega}_c - (\vec{\omega}_c\cdot\nabla)\vec{r}$$

$$(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{r} = \sum_k \omega_k \partial_k \sum_l x_l \vec{e}_l = \sum_k \omega_k \vec{e}_k = \vec{\omega} \qquad (\partial_k x_l = \delta_{kl})$$

$$\Rightarrow \nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}.$$

* $\vec{j} = \vec{r}$

$$\nabla\times\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\underbrace{(\partial_y z - \partial_z y)}_{0} + \ldots = \vec{0}.$$

— · —

Doppelte Ableitungen

$$* \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla \cdot \nabla \phi =: \nabla^2 \phi =: \Delta \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi .$$

„Laplace-Operator"

„Poincaré-Lemma"

$$* \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = \nabla \times \nabla \phi = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x \phi & \partial_y \phi & \partial_z \phi \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right) \phi + \ldots = \vec{0}$$

partielle Ableitungen vertauschen miteinander, vgl. Seite 9.

$$* \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \vec{E} = 0$$

$$* \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

Graßmann-Identität, Seite 14

Ableitungen von Produkten (Produktregel)

Eine nützliche Schreibweise (wie auf Seite 17): $\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg' = \frac{d}{dx}(f g_c + f_c g)$ „konstant"

Kombiniere diese jetzt mit den bekannten Regeln für Skalar- und Vektorprodukte:

$$* \quad \nabla \cdot (\phi \vec{E}) = \nabla \cdot (\phi_c \vec{E} + \phi \vec{E}_c) = \phi \, \nabla \cdot \vec{E} + (\nabla \phi) \cdot \vec{E}$$

$$* \quad \nabla \times (\phi \vec{E}) = \nabla \times (\phi_c \vec{E} + \phi \vec{E}_c) = \phi \, \nabla \times \vec{E} + (\nabla \phi) \times \vec{E}$$

$$* \quad \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{E}_c \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}_c) = -\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E})$$

Eigenschaften des Spatproduktes (Seite 13)

$$* \quad \nabla \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \nabla \times (\vec{E}_c \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}_c)$$
$$= \vec{E} \, (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \, (\nabla \cdot \vec{E}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{E} - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$* \quad \nabla (\vec{E} \cdot \vec{B}) = \nabla (\vec{E}_c \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{B}_c)$$
$$= \vec{E} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{E}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{B}$$

Aufgabe 4.4

— · —