2.2 Skalarprodukt, Vektorprodukt [Lang & Pucker 3.3.2]

Wir betrachten Vektorfelder (wie $\nabla f(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$) in der Nähe von $\vec{r} = \vec{r}_0$.
Die möglichen Werte von $\nabla f(\vec{r}_0)$, $\vec{E}(\vec{r}_0)$ usw. bilden einen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ (den „Tangentenraum" von $\vec{r}_0$). Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ Elemente aus diesem Raum.

Definition: (wie früher)

Ein Skalarprodukt (bzw. ein „inneres Produkt") ist eine Verknüpfung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (EMTP I, Kap. 3.1)

* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ („kommutativ")
* $\vec{a} \cdot (\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) = \beta\, \vec{a} \cdot \vec{b} + \gamma\, \vec{a} \cdot \vec{c}$ („linear")
* $|\vec{a}|^2 := \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$
* $|\vec{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Es folgt $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) sowie

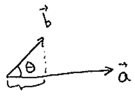
$$\cos\Theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

In einer orthonormalen Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k$.

Geometrisch:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \underbrace{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \vec{b}} = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}| \cos\Theta}$$

Projektion von $\vec{b}$ in Richtung von $\vec{a}$



Man kann aber auch eine andere lineare Verknüpfung, diesmal $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definieren!

(Vgl. $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}$: Skalarprodukt $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wäre $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$, bzw. $\mathrm{Re}(z_1 z_2^*)$.
Das komplexe Produkt (Seite 3) ist dagegen $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.)

Definition:

Ein Vektorprodukt (bzw. ein „Kreuzprodukt" bzw. ein „äußeres Produkt") ist eine Verknüpfung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften

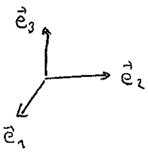
* $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ („antikommutativ" / „antisymmetrisch")

  Es folgt: $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

* $\vec{a} \times (\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) = \beta\, \vec{a} \times \vec{b} + \gamma\, \vec{a} \times \vec{c}$ („linear")

* In einer „rechtshändigen" orthonormalen Basis gilt:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$
$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$



Es folgt: * $\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\times(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)\underbrace{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}_{\vec{e}_3} + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\underbrace{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}_{\vec{e}_1} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\underbrace{\vec{e}_3\times\vec{e}_1}_{\vec{e}_2}.$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Determinante (EMTP I, Kap. 3.2)

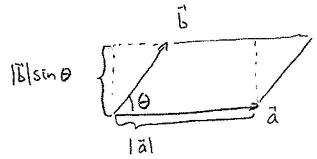
* $$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2$$

$$= a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2$$
$$- 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \stackrel{!}{=} |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

D.h., $$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\Theta} = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\Theta|.$$

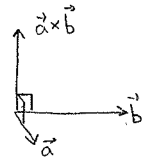
Geometrisch:



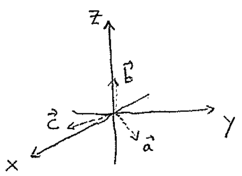
$\Rightarrow$ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ gibt die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms an.

* $$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$!
(und zwar rechtshändig)



Beispiel: $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$
$\vec{b} = \vec{e}_z$



$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y) =: \vec{c}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}} = 1.$$

— $\supset$ —

Definition: Ein Spatprodukt ist eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Behauptung 1: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$

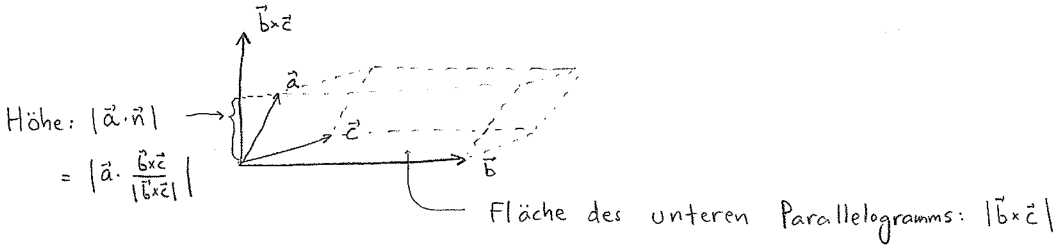
Beweis: Benutze die bekannten Eigenschaften der Determinante. $\square$

Behauptung 2: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, d.h. man kann „$\times$" und „$\cdot$" vertauschen.

Beweis:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \underset{\text{Behauptung 1}}{=} \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \underset{\text{Skalarprodukt ist kommutativ}}{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad \square .$$

Anwendung 1: $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ gibt das Volumen eines durch die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gebildeten „Parallelepipeds" (bzw. „Spats") an.



$$\text{Volumen} = \left| \vec{a} \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right| \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| .$$

Anwendung 2: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$.

(Beweis: EMTP I, Kap. 3.3)

Anschaulich: wenn in derselben Ebene (d.h. nicht linear unabhängig) verschwindet das Volumen.

— o —

Es gibt auch viele weitere Formel mit Skalar- und Vektorprodukten; im Folgenden werden noch drei „Sätze" gegeben und begründet, eine im Allgemeinen benutzbare Methode wird aber erst im Kap. 2.4 eingeführt.

Satz 1: $\vec a \times (\vec b \times \vec c) = (\vec a \cdot \vec c)\,\vec b - (\vec a \cdot \vec b)\,\vec c$

(„Graßmann-Identität" für ein doppeltes Kreuzprodukt)

Beweis: $\vec a \times (\vec b \times \vec c)$ ist orthogonal zu $\vec a$, deshalb gilt unbedingt

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) = \beta\,\vec b + \gamma\,\vec c \quad , \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R} .$$

Nehme Skalarprodukt mit $\vec a$ auf beiden Seiten; die linke Seite wird zu

$$\vec a \cdot (\vec a \times (\vec b \times \vec c)) \underset{\text{Behauptung 2 auf Seite 13}}{=} (\vec a \times \vec a) \cdot (\vec b \times \vec c) \underset{\vec a \times \vec a = \vec 0}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \beta\, \vec a \cdot \vec b + \gamma\, \vec a \cdot \vec c \qquad \Rightarrow \begin{cases} \beta = \varkappa\ \vec a \cdot \vec c \\ \gamma = -\varkappa\ \vec a \cdot \vec b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec a \times (\vec b \times \vec c) = \varkappa \left[(\vec a \cdot \vec c)\,\vec b - (\vec a \cdot \vec b)\,\vec c \right]$$

Wähle jetzt $\vec a = \vec e_1$, $\vec b = \vec e_1$, $\vec c = \vec e_2$; $\vec b \times \vec c = \vec e_3$

$$\underbrace{\vec e_1 \times \vec e_3}_{-\vec e_2} = \varkappa \left[\qquad - \vec e_2 \right] \quad \Rightarrow \quad \varkappa = 1 \qquad \square .$$

Satz 2: $(\vec a_1 \times \vec a_2) \cdot (\vec b_1 \times \vec b_2) = \vec a_1 \cdot \vec b_1\ \vec a_2 \cdot \vec b_2 - \vec a_1 \cdot \vec b_2\ \vec a_2 \cdot \vec b_1$

(„Lagrange-Identität")

Beweis:

$$(\vec a_1 \times \vec a_2) \cdot (\vec b_1 \times \vec b_2) \underset{\text{Behauptung 2 auf Seite 13}}{=} \vec a_1 \cdot (\vec a_2 \times (\vec b_1 \times \vec b_2)) \underset{\text{Satz 1}}{=} \vec a_1 \cdot \left((\vec a_2 \cdot \vec b_2)\,\vec b_1 - (\vec a_2 \cdot \vec b_1)\,\vec b_2 \right) \qquad \square$$

Satz 3: $\vec a \times (\vec b \times \vec c) + \vec b \times (\vec c \times \vec a) + \vec c \times (\vec a \times \vec b) = \vec 0$

(„Jacobi-Identität")

Beweis: Benutze Satz 1:

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) + \vec b \times (\vec c \times \vec a) + \vec c \times (\vec a \times \vec b) = \cancel{(\vec a \cdot \vec c)\vec b} - \cancel{(\vec a \cdot \vec b)\vec c} + \cancel{(\vec b \cdot \vec a)\vec c} - \cancel{(\vec b \cdot \vec c)\vec a} + \cancel{(\vec c \cdot \vec b)\vec a} - \cancel{(\vec c \cdot \vec a)\vec b}$$

$\square$

Bemerkung: $\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = (\vec a \times \vec b) \cdot \vec c$ (Behauptung 2)

aber

$\vec a \times (\vec b \times \vec c) \neq (\vec a \times \vec b) \times \vec c$!