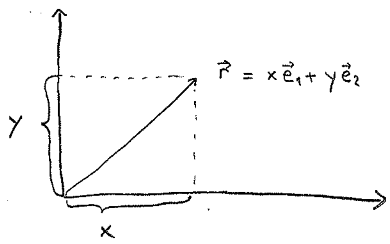
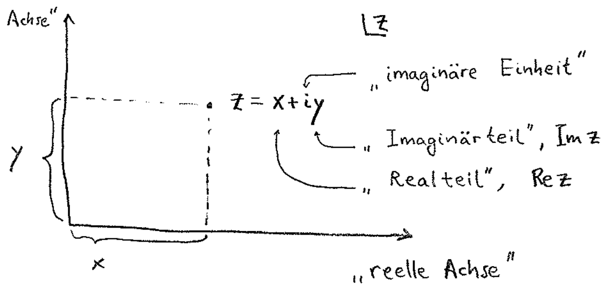
1.2 Komplexe Zahlen und Funktionen [Lang & Pucker 2.1-3]

$\mathbb{R}^2$ mit spezieller zusätzlicher Struktur $\Rightarrow$ die komplexe Ebene $\mathbb{C}$



$\Rightarrow$



Summen von komplexen Zahlen sind wie bei Vektoren:

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \,.$$

Produkte werden aber auch definiert, mittels der zusätzlichen Eigenschaft $\boxed{i^2 := -1}$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2 y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

(Es existieren auch „neutrale Elemente" ($z + 0 = z$; $z \cdot 1 = z$) und „inverse Elemente" ($z + (-z) = 0$; $z \cdot z^{-1} = 1$) bzgl. beider „Verknüpfungen"; alles dies macht die Menge der komplexen Zahlen zu einem „Körper".)

Subtraktion: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$

Division: $\dfrac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot z_2^{-1}$; Was ist z_2^{-1} ?

Sei $z_2 = x_2 + iy_2$.

Die „komplex-konjugierte" davon:

$$z_2^* := x_2 - iy_2$$

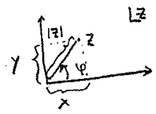
Es gilt: $z_2 z_2^* = x_2^2 + y_2^2 + i\underbrace{(x_2y_2 - x_2y_2)}_{0} \in \mathbb{R}$.

Also: $\boxed{z_2^{-1} = \dfrac{z_2^*}{z_2 z_2^*}}$

Weitere Definitionen:

* Betrag bzw. Modul von z: $|z| = \operatorname{mod} z := \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Graphisch:



* Argument von z: $\arg z := \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

* Polare Form von z: $z = x + iy = |z| \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

$$= |z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi \right) .$$

Weil Addition und Multiplikation zur Verfügung stehen, können wir die beiden kombinieren und komplexe Polynome definieren:

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \, .$$

Die Koeffizienten könnten reell ($a_k \in \mathbb{R}$) oder auch komplex ($a_k \in \mathbb{C}$) sein.

Komposition $[\,(g \circ f)(z) := g(f(z))\,]$, Umkehrfunktion $[\, f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathbb{1} \,]$ sowie unendliche Reihen $[\,P_n(z) \text{ mit } n \to \infty\,]$ führen zu weiteren Funktionen.

Besonders wichtig: die Exponentialfunktion:

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

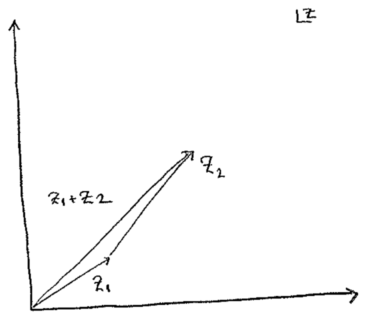
[Umkehrfunktion: $\ln(z)$; allgemeine Potenz: $a^z := \exp(z \ln a)$; $e^z = \exp(z)$.]

Euler-Formel:

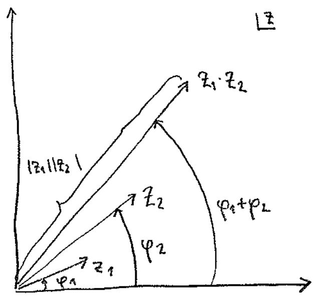
$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi + \frac{1}{2!}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \ldots \\ &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots + i\left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots\right] \\ &\overset{!}{=} \cos\varphi + i \sin\varphi \, . \end{aligned}$$

Zum Beispiel: $\underline{\underline{e^{i\pi}}} = \cos\pi + i \sin\pi = \underline{\underline{-1}}$.

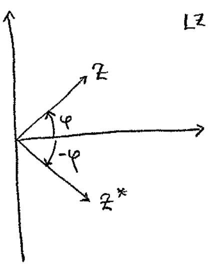
Graphische Darstellungen:



Summe: wie bei normalen Vektoren in $\mathbb{R}^2$



Produkt: polare Form kann jetzt als $z = |z|\, e^{i\varphi}$ ausgedrückt werden, und es folgt $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

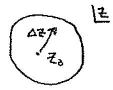


Komplexe Konjugation: $z^* = x - iy$, d.h. Imaginärteil wird um die reelle Achse reflektiert ($\varphi \to -\varphi$).

Komplexe Analysis

Komplexe Funktionen können abgeleitet (und integriert) werden.

Definition $f(z)$ ist differenzierbar bei $z = z_0$



$$\Leftrightarrow \quad f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\,\Delta z + \Delta z\, \mathcal{O}(\Delta z),$$

wobei $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \mathcal{O}(\Delta z) = 0$ gilt, unabhängig von der Richtung von Δz.

Unter welchen Umständen ist $f(z)$ differenzierbar?

Schreibe $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$.

$$\Delta z := \Delta x \quad \Rightarrow \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) + i v(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0) - i v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Delta z := i\Delta y \quad \Rightarrow \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) + i v(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) - i v(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen müssen also erfüllt sein: $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{array}\right.$.

Entsprechende Funktionen werden „komplex-analytisch" genannt.
Für diese funktioniert alles wie bei reellen Funktionen (wähle einfach $\Delta z = \Delta x$).

Eine alternative Ausdrucksweise: $x = \mathrm{Re}\, z = \frac{z+z^*}{2}$; $y = \mathrm{Im}\, z = \frac{z-z^*}{2i}$

Betrachte $\frac{\partial f}{\partial z^*}$: $\frac{\partial}{\partial z^*}\left[u(x,y) + i v(x,y)\right]$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} + i\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + i\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{i}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \underset{\text{Cauchy-Riemann}}{=} 0 .$$

D.h., wenn wir x,y mittels z, z^* ausdrücken,
darf keine z^* übrig bleiben; z^3 ist komplex-analytisch, $|z|^2$ nicht!

Das Studium komplex-analytischer Funktionen ist ein sehr breites und interessantes Fachgebiet; mehr darüber in der Vorlesung MMP.

Anwendungen

* Verschiedene trigonometrische Identitäten können leicht mit Hilfe der polaren Form hergeleitet werden:

(i) $$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$= \underbrace{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2} + i\,\underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)}$$
$$= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

(ii) $$e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi = (e^{i\varphi})^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

[Satz von de Moivre]

$\Rightarrow$ Formel für $\cos n\varphi, \sin n\varphi$.

* Fundamentalsatz der Algebra:

ein Polynom des Grades n kann als $P_n(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$ geschrieben werden, d.h. alle n Nullstellen können gefunden werden.

Beispiel: $$z^2+1=0$$

Schreibe: $z = re^{i\varphi}$, $z^2 = r^2 e^{2i\varphi} = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

$$z^2 = -1 \iff r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = -1$$

$$\iff \begin{cases} r^2\cos 2\varphi = -1 \\ \sin 2\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\varphi = n\cdot\pi\,,\ n\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \cos 2\varphi = (-1)^n\,,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow r^2(-1)^n = -1 \Rightarrow r=1\,;\ n = \text{ungerade}$$

$$\Rightarrow z = e^{i\frac{n\pi}{2}} = \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) \underset{n\ \text{ungerade}}{=} \pm i\,.$$

(Bemerkung: falls die Koeffizienten (a_k) von $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ reell sind, kommen eventuelle komplexe Nullstellen unbedingt als komplex-konjugierte Paare vor, d.h. z_m und z_m^* $\Rightarrow$ Aufgabe 1.4.)

* Komplexe Zahlen sind sehr wichtig auch in der Quantenmechanik.