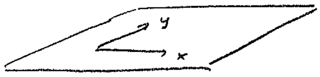
1. Einleitung

1.1 Mehr als eine Dimension [Lang & Pucker 7.1]

In EMTP I waren die Funktionen in der Regel der Form $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Jetzt betrachten wir einen Raum mit (vorerst) zwei Koordinaten, d.h. $\mathbb{R}^2$.

z.B. Oberfläche  $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ bzw. $\vec{r} = (x,y)$

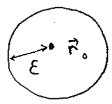
Welche Arten von Funktionen könnten hier eine physikalische Rolle spielen?

- ein „skalares" Feld (d.h. ohne Richtung), z.B. die Temperatur $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- ein „Vektorfeld" (zeigt in eine Richtung), z.B. elektrisches Feld $\vec{E}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
- eine Raumkurve eines Massenpunktes, $\vec{r}(t)$, d.h. $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Wenn wir die Komponenten von $\vec{E}$ bzw. $\vec{r}$ einzeln betrachten, dann ist die wesentliche Neuigkeit eine Abbildung der Form $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und wir beschränken uns für den Moment auf diesen Fall.

$\Rightarrow$ Wie werden die Grundbegriffe der Analysis (Grenzwert, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, ...) auf den Fall $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erweitert?

Definition: ε- Umgebung von $\vec{r}_0$:



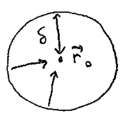
$$U_\varepsilon(\vec{r}_0) := \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{r}-\vec{r}_0| < \varepsilon \}$$

wobei $|\vec{r}-\vec{r}_0| := \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}$ (Pythagoras)

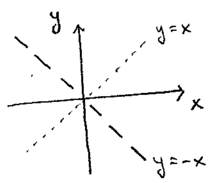
Definition: $f(\vec{r})$ hat bei $\vec{r} = \vec{r}_0$ den Grenzwert f_0

$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |f(\vec{r}) - f_0| < \varepsilon$ falls $\vec{r} \in U_\delta(\vec{r}_0)$.

Bemerkung: Der Grenzwert muss unabhängig davon sein, aus welcher Richtung man kommt:



(Gegenbeispiel: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ bei Ursprung



$y = x \Rightarrow f = \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = +\dfrac{1}{2}$

$y = -x \Rightarrow f = \dfrac{-x^2}{x^2+x^2} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\vec{r}\to\vec{0}} f(\vec{r})$ existiert nicht!)

Definitionen:

* $f(\vec{r})$ ist stetig bei $\vec{r} = \vec{r}_0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{r}\to\vec{r}_0} f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0)$.
* $f(\vec{r})$ ist stetig auf einem Definitionsbereich $D \Leftrightarrow f$ stetig $\forall \vec{r} \in D$.

Definition:

$f(\vec{r})$ ist differenzierbar bei $\vec{r} = \vec{r}_0$

$$\Leftrightarrow \quad f(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) - f(\vec{r}_0) = \vec{a}(\vec{r}_0)\cdot\Delta\vec{r} + |\Delta\vec{r}|\, O(\Delta\vec{r}), \qquad (*)$$

wobei $\lim_{\Delta\vec{r}\to\vec{0}} O(\Delta\vec{r}) = 0$ gilt.

Bemerkungen:

Diese Eigenschaft, auch die „totale" Differenzierbarkeit genannt, verlangt wieder, dass $\Delta\vec{r}$ in eine beliebige Richtung zeigen kann.

Wenn wir dagegen eine besondere Koordinate wählen, und die anderen festhalten, funktioniert alles wie in einer Dimension; es geht dann um eine „partielle Ableitung":

$$f(\vec{r}_0 + \varepsilon\vec{e}_1) - f(\vec{r}_0) = \frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial x}\varepsilon + \varepsilon\, O_1(\varepsilon)$$

$$f(\vec{r}_0 + \varepsilon\vec{e}_2) - f(\vec{r}_0) = \frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial y}\varepsilon + \varepsilon\, O_2(\varepsilon),$$

wobei $\lim_{\varepsilon\to 0} O_i(\varepsilon) = 0$ gilt, für $i = 1, 2$.

Totale Differenzierbarkeit impliziert die Existenz der partiellen Ableitungen:

$$\Delta\vec{r} := \varepsilon\vec{e}_1 \Rightarrow a_1(\vec{r}_0) = \frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial x}$$

$$\Delta\vec{r} := \varepsilon\vec{e}_2 \Rightarrow a_2(\vec{r}_0) = \frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial y}$$

Es funktioniert aber nicht unbedingt in die umgekehrte Richtung.

Gegenbeispiel:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\ ; \quad f(0,0) := 0.$$

$$x = 0 \Rightarrow f = 0\ \forall y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0\ \forall y$$

$$y = 0 \Rightarrow f = 0\ \forall x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0\ \forall x$$

Jedoch ist f bei Ursprung nicht einmal stetig (vgl. Seite 1).
Totale Differenzierbarkeit impliziert aber Stetigkeit. (Beweis: aus $(*)$).

Fazit:

Wenn es mehrere Dimensionen gibt, ist „Ableitung" nicht eindeutig, sondern viele Möglichkeiten stehen zur Verfügung. Dasselbe gilt auch für Integration. Mehr dazu im Kap. 2!