Einführung in die Methoden der theoretischen Physik II	**2. Klausur**	02.03.2011

Keine Hilfsmittel. 6 Punkte / Aufgabe. 6 Punkte reichen zur Note 4,0.

Aufgabe 1: Ein Vektorfeld $\vec{B}$ sei der Form $\vec{B} = (\nabla u) \times (\nabla v)$, wobei u, v skalare Funktionen sind.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{B}$ quellenfrei ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{A} = \frac{1}{2}(u\nabla v - v\nabla u)$ ein Vektorpotential von $\vec{B}$ ist.

Aufgabe 2: Betrachtet wird die Schraubenlinie $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = \varphi/2\pi$, $0 \leq \varphi \leq 10\pi$ (bitte skizzieren!). Bestimmen Sie die folgenden Linienintegrale:

(a) $\vec{e}_z \cdot \int_C \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{E}$, wobei $\vec{E} = \vec{r}$.

(b) $\int_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B}$, wobei $\vec{B} = y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$.

Aufgabe 3: Betrachtet wird das Vektorfeld

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}\sqrt{x^2+y^2}}{r^4}\ , \quad r := |\vec{r}|\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{E}$ für $r > 0$ quellenfrei ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Oberflächenintegral

$$I = \oint_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E}$$

unabhängig von der Oberfläche S ist, solange S den Ursprung einschließt (bitte skizzieren; warum ist die genannte Bedingung wichtig?).

Aufgabe 4: Betrachtet wird die Funktion $f(x) = c\,(1 - x^2)$, $|x| < 1$; $f(x) = 0$, $|x| \geq 1$.

(a) Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte von $f(x)$ (bitte skizzieren!).

(b) Sie $\delta_\epsilon(x) := f(x/\epsilon)$. Wie muss c gewählt werden, und eine Darstellung der Diracschen Deltafunktion zu erhalten?

$$\nabla = \frac{\vec{e}_u}{h_u}\partial_u + \frac{\vec{e}_v}{h_v}\partial_v + \frac{\vec{e}_w}{h_w}\partial_w$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial_u(h_v h_w E_u) + \partial_v(h_w h_u E_v) + \partial_w(h_u h_v E_w)}{h_u h_v h_w}$$

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\vec{e}_u & h_v\vec{e}_v & h_w\vec{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u E_u & h_v E_v & h_w E_w \end{vmatrix}$$

$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$ [Kugel]

$\vec{r} = (\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)$ [Zylinder]

$$\int_S \mathrm{d}\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{E} = \int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E}$$

$$\int_V \mathrm{d}V\,\nabla\cdot\vec{E} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{E}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$$

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n x}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{L}\int_P \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n x}{L}}$$

$$f(x) = \int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\tilde{f}(k)e^{ikx}$$

$$\tilde{f}(k) = \int\mathrm{d}x\, f(x)e^{-ikx}$$

$$\delta^{(d)}(\vec{r}) = \int\frac{\mathrm{d}^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$