Einführung in die Methoden der theoretischen Physik II	**1. Klausur**	02.09.2010

Keine Hilfsmittel. 6 Punkte / Aufgabe. 6 Punkte reichen zur Note 4,0.

Aufgabe 1: Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{E} = (2axy + z^3)\,\vec{e}_x + x^2\,\vec{e}_y + 3axz^2\,\vec{e}_z \ ,$$

dabei ist a eine Konstante.

(a) Für welchen Wert von a ist $\vec{E}$ wirbelfrei?

(b) Bestimmen Sie $\Gamma := \oint \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E}$ entlang der geschlossenen Kurve

$$\begin{aligned} x &= 3(1+\cos\phi)\ , \\ y &= 4(1+\cos\phi)\ , \\ z &= 5\sin\phi\ , \quad \phi\in[0,2\pi]\ . \end{aligned}$$

Für welchen Wert von a verschwindet Γ?

[Hinweis: $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin^2\theta = \pi,\ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin^2\theta\cos^2\theta = \pi/4,\ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\cos^n\theta = 0,\ n\in\mathbb{N}$.]

Aufgabe 2: Sei $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $B =$ const. Bestimmen Sie $\int_S \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{B}$ durch explizite Integration in Kugelkoordinaten, wobei S der Mantel der Halbkugel $x^2+y^2+z^2\le R^2$, $z>0$ ist.

Aufgabe 3:

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{F} := (x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y)/(x^2+y^2)^{3/2}$ wirbelfrei ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Linienintegral $I := \int_{\vec{a}}^{\vec{b}}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}$ unabhängig vom Integrationsweg ist.

(c) Bestimmen Sie den Wert von I für den Fall $\vec{a} = (1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,0)$.

Aufgabe 4: Betrachten Sie das Polynom $f(x) = 1-x^2$ in dem Bereich $|x|<1$.

(a) Ermitteln Sie eine Darstellung von $f(x)$ als Fourier-Reihe mit Periode $L=2$.

(b) Benutzen Sie die Antwort, um die Summe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ zu berechnen.

$$\nabla = \frac{\vec{e}_u}{h_u}\partial_u + \frac{\vec{e}_v}{h_v}\partial_v + \frac{\vec{e}_w}{h_w}\partial_w \qquad \int_S \mathrm{d}\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{E} = \int_{\partial S}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n x}{L}}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial_u(h_v h_w E_u) + \partial_v(h_w h_u E_v) + \partial_w(h_u h_v E_w)}{h_u h_v h_w} \qquad \int_V \mathrm{d}V\,\nabla\cdot\vec{E} = \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{E} \qquad c_n = \frac{1}{L}\int_P \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n x}{L}}$$

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\vec{e}_u & h_v\vec{e}_v & h_w\vec{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u E_u & h_v E_v & h_w E_w \end{vmatrix} \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad f(x) = \int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\tilde{f}(k)e^{ikx}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \qquad \tilde{f}(k) = \int\mathrm{d}x\, f(x) e^{-ikx}$$

$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$ [Kugel]

$\vec{r} = (\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)$ [Zylinder]

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0) \qquad \delta^{(d)}(\vec{r}) = \int\frac{\mathrm{d}^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$