Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 10**	06.07.2010

[Abgabe **13.07.** in H16 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 1: Eindimensionale Fourier-Transformation.
Betrachtet wird die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

(a) Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ (4 Punkte). [Antwort: $\frac{\sin(ak)}{ak}$.]

(b) Überprüfen Sie den Wert $\tilde{f}(0)$ mittels direkter Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)$ (2 Punkte).

Aufgabe 2: Eindimensionale Fourier-Transformation.
Betrachtet wird die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a(1 - a|x|), & |x| < \frac{1}{a} \\ 0, & |x| > \frac{1}{a} \end{cases}$$

(a) Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ (4 Punkte). [Antwort: $\frac{4a^2}{k^2}\sin^2(\frac{k}{2a})$.]

(b) Überprüfen Sie den Wert $\tilde{f}(0)$ mittels direkter Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)$ (2 Punkte).

Aufgabe 3: Inverse Fourier–Transformation.
Im Vorlesungsskript wurde die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k) = \frac{2\Delta^{-1}}{k^2+\Delta^{-2}}$ der Funktion $f(x) = e^{-|x|/\Delta}$ bestimmt. Verwenden Sie diese Information, um die folgenden Integrale zu berechnen:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, \frac{\cos(a\,z)}{b^2 + z^2}$ (3 Punkte);

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}z\, \frac{\sin(c\,z)}{z}$ (3 Punkte).

Aufgabe 4: Dreidimensionale Fourier–Transformation.
Das „Coulomb-Potential" der starken Wechselwirkung hat die Form

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\alpha\, e^{-m_\pi r}}{4\pi r}\,, \quad r = |\vec{r}|\,,$$

wobei m_π die Pion-Masse bezeichnet (in bestimmten Einheiten). Ermitteln Sie die entsprechende Fourier-Transformierte (6 Punkte).

Zusatzaufgabe: Andere Integraltransformationen.
Neben der Fourier-Transformation können auch andere Integraltransformationen definiert werden. Wenn die Funktion $f(x)$ nur bei $x \geq 0$ von Interesse ist, kommen insbesondere die *Laplace-Transformation*, $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, f(x)e^{-kx}$, sowie die *Mellin-Transformation*, $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, f(x)x^{k-1}$ in Frage. Sei auch eine „einseitige Fourier-Transformation" als $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, f(x)e^{-ikx}$ definiert. Ermitteln Sie alle drei für den Fall $f(x) = 1$, für $|x-2| < 1$; $f(x) = 0$ andernfalls (3 Extrapunkte).