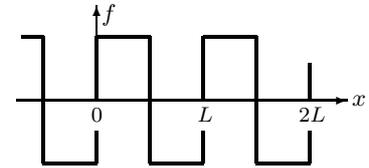


Aufgabe 1: Rechteckschwingung.

(a) Ermitteln Sie die Sinus-Reihe der rechts skizzierten Funktion $f(x) = \{1, (x \bmod L) \in (0, \frac{L}{2}); -1, (x \bmod L) \in (\frac{L}{2}, L)\}$ (2 Punkte).

(b) Skizzieren Sie die Summe der ersten zwei Terme (2 Punkte).

(c) In der Vorlesung (bzw. im Skript) wurden verschiedene Darstellungen der Funktion $f(x) = x, 0 < x \leq 1$ hergeleitet. Können Sie das Ergebnis aus (a) als Ableitung einer dieser Darstellungen reproduzieren (2 Punkte)?



Aufgabe 2: Verlegung des Definitionsbereichs.

Eine Funktion $\phi(x)$, die im Intervall $x \in (a, a + L]$ definiert ist, wobei $a \in \mathbb{R}$ gilt, soll als Fourier-Reihe dargestellt werden.

(a) Ermitteln Sie die allgemeinen Ausdrücke der komplexen Fourier-Darstellung für den Fall, dass die periodische Fortsetzung die Periode L aufweist (2 Punkte).

(b) Ermitteln Sie die entsprechende reelle (Sinus- und Kosinus-) Darstellung für den Fall $a = -L/2$ (2 Punkte).

(c) Welche Form einer Fourier-Reihe würden Sie bevorzugen, wenn es das Ziel wäre, eine Funktion mit den Randbedingungen $\phi(0) = \phi(\pi/2) = 0$ darzustellen (2 Punkte)?

Aufgabe 3: Summierung von Reihen.

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$.

(a) Ermitteln Sie eine Darstellung von $f(x)$ als Kosinus-Reihe mit Periode 2π (bitte skizzieren!) (3 Punkte). [Antwort: $\pi^2/3 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$.]

(b) Benutzen Sie die Antwort, um die Summe $\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ durchzuführen (3 Punkte). [Antwort: $\zeta(2) = \pi^2/6$.]

Aufgabe 4: Unterschiedliche periodische Fortsetzungen. Uns interessiert die Funktion $\sin(\pi t)$ im Definitionsbereich $t \in [0, 1]$.

(a) Ermitteln Sie eine Darstellung dieser Funktion als Fourier-Kosinus-Reihe (bitte skizzieren!) (3 Punkte). [Antwort: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{\cos(n\pi t)}{n^2-1}$.]

(b) Wir wollen dieselbe Funktion durch ein Polynom approximieren, und zwar der Form $P(t) = at(1-t)$. Ermitteln Sie eine Darstellung von $P(t)$ durch eine Sinus-Reihe. Wie würden Sie a wählen, um eine sinnvolle Näherung von $\sin(\pi t)$ zu erhalten, und wie groß ist dann die erste Korrektur (3 Punkte)?