Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 8**	22.06.2010

[Abgabe **29.06.** in H16 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 1: Ein wirbelfreies Vektorfeld als Gradient eines Skalarpotentials.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{E} = (3x^2y - y^2)\vec{e}_x + (x^3 - 2xy + 1)\vec{e}_y$ wirbelfrei ist (2 Punkte).

(b) Ermitteln Sie ein entsprechendes Skalarpotential (4 Punkte).

Aufgabe 2: Ein quellenfreies Vektorfeld als Rotation eines Vektorpotentials.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{B} = x(z-y)\vec{e}_x + y(x-z)\vec{e}_y + z(y-x)\vec{e}_z$ quellenfrei ist (2 Punkte).

(b) Ermitteln Sie ein entsprechendes Vektorpotential (4 Punkte).

Aufgabe 3: Ein wirbel- und quellenfreies Vektorfeld. Betrachtet wird ein zylindersymmetrisches Vektorfeld $\vec{B} = j\,\vec{e}_\varphi/\rho$. Für $\rho > 0$ gilt sowohl $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ als auch $\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$; deshalb kann $\vec{B}$ als $\vec{B} = \nabla \times \vec{C}$ aber auch als $\vec{B} = -\nabla\phi$ ausgedrückt werden.

(a) Ermitteln Sie ein Beispiel für $\vec{C}$ (2 Punkte). [Hinweis: $\vec{C} = f(\rho)\,\vec{e}_z + \nabla\chi$]

(b) Ermitteln Sie ein Beispiel für ϕ (2 Punkte). [Hinweis: $\phi = g(\varphi) + \text{const.}$]

(c) Bestimmen Sie $\Gamma = \oint_{\rho=R} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B}$ mittels ϕ und des Hauptsatzes (2 Punkte). [$\Gamma = 2\pi j$]

Aufgabe 4: Ein singuläres Vektorpotential. Betrachtet wird ein kugelsymmetrisches Vektorfeld $\vec{E} = q\,\vec{r}/r^3$. Für $r > 0$ gilt $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ (sowie übrigens auch $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$). Wir definieren (in Kugelkoordinaten)

$$\vec{C} := q\,\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi\ .$$

(a) In welchem Teilraum von $G := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, r > 0\}$ ist $\vec{C}$ wohldefiniert (1 Punkt)?

(b) Verifizieren Sie, dass $\vec{E}$ als $\vec{E} = \nabla \times \vec{C}$ geschrieben werden kann (2 Punkte).

(c) Wenn $\vec{E} = \nabla \times \vec{C}$ in das Flußintegral $\Phi = \oint_{r=R} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E}$ eingesetzt wird, kann Φ laut Stokes als Linienintegral ausgedrückt werden. Dabei wird um den Punkt der Oberfläche integriert, bei dem $\vec{C}$ singulär ist. Zeigen Sie, dass der richtige Wert $\Phi = 4\pi q$ sich auf diese Weise wiederherstellen läßt (3 Punkte).

Zusatzaufgabe: Lösung einer zeitabhängigen Differenzialgleichung.
Betrachtet wird die Diffusionsgleichung $\partial_t T(t,\vec{r}) = D\nabla^2 T(t,\vec{r})$ mit der Anfangsbedingung $T(0,\vec{r}) := T_0 \sin(kx)$, $k = \text{const.}$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung als $T(t,\vec{r}) = \exp(tD\nabla^2)T(0,\vec{r})$ ausgedrückt werden kann, wobei $\exp$ durch ihre Reihenentwicklung definiert ist (2 Extrapunkte).

(b) Skizzieren Sie die Lösung für $t = 0$, $t = 1/k^2D$ sowie $t \gg 1/k^2D$ (2 Extrapunkte).