Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 7**	15.06.2010

[Abgabe **22.06.** in H16 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 1: Gaußscher Satz. Betrachtet wird ein Vektorfeld $\vec{E} = 4x\,\vec{e}_x - 2y^2\,\vec{e}_y + z^2\,\vec{e}_z$ um einen Zylinder, eingeschlossen von den Ebenen $z = 0$ und $z = 3$ sowie dem Mantel $x^2+y^2 = 4$.

(a) Bestimmen Sie $\int_{S_1} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E}$, wobei S_1 den Zylindermantel bezeichnet (2 Punkte). $[48\pi]$

(b) Bestimmen Sie $\int_{S_2} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E}$, wobei S_2 aus beiden Endkappen besteht (2 Punkte). $[36\pi]$

(c) Bestimmen Sie $\int_V \mathrm{d}V\, \nabla \cdot \vec{E}$, und verifizieren Sie die Gültigkeit des Gaußschen Satzes (3 Punkte). [Antwort: 84π]

Aufgabe 2: Stokesscher Satz. Betrachtet wird ein Vektorfeld $\vec{B} = z\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y + y\,\vec{e}_z$ um eine Halbkugel, eingeschlossen von der Ebene $z = 0$ sowie der Schale $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$.

(a) Bestimmen Sie $\int_{S_1} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$, wobei S_1 den Kreis $z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$ bezeichnet (2 Punkte). [Antwort: π]

(b) Bestimmen Sie $\int_{S_2} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$, wobei S_2 die Kugeloberfläche bezeichnet (2 Punkte). $[\pi]$

(c) Bestimmen Sie ebenfalls $\oint_{\partial S_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B}$, und verifizieren Sie die Gültigkeit des Stokesschen Satzes (3 Punkte).

Aufgabe 3: Greensche Sätze. Die Greenschen Sätze sind Korollarien des Gaußschen Satzes, gewonnen durch eine angemessene Wahl des Integrandes.

(a) Die Funktion u erfülle die Laplace-Gleichung, d.h. $\nabla^2 u = 0$. Verifizieren Sie die Gültigkeit des ersten Greenschen Satzes (2 Punkte): $\int_V \mathrm{d}V\, |\nabla u|^2 = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{A} \cdot u \nabla u$.

(b) Seien u, v zwei (mindestens zweimal differenzierbare) Funktionen. Verifizieren Sie die Gültigkeit des zweiten Greenschen Satzes (2 Punkte):

$$\int_V \mathrm{d}V\, (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{A} \cdot (u\nabla v - v\nabla u)\ .$$

Aufgabe 4: Anfänge der Differenzialgeometrie. Eine d-dimensionale „Mannigfaltigkeit" ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$, der von d kontinuierlichen Koordinaten parametrisiert wird: $d = 0$ entspricht einzelnen Punkten, $d = 1$ Kurven, $d = 2$ Oberflächen, $d = 3$ Volumina. Die verschiedenen Integralsätze erlauben uns, die Dimension der Integrationsmannigfaltigkeit zu ändern (Hauptsatz $0 \leftrightarrow 1$; Stokes $1 \leftrightarrow 2$; Gauß $2 \leftrightarrow 3$). Betrachtet werden zwei Integrale,

$$I_C := \oint_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \nabla\phi\ , \quad I_S := \oint_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{E}\ .$$

Überprüfen Sie die Gültigkeit der Behauptungen $I_C = I_S = 0$, indem Sie:

(a) beim I_C die Dimension als $1 \to 0$ ändern ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(b) beim I_C die Dimension als $1 \to 2$ ändern ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(c) beim I_S die Dimension als $2 \to 1$ ändern ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(d) beim I_S die Dimension als $2 \to 3$ ändern ($1\frac{1}{2}$ Punkte).