Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 4**	11.05.2010

[Abgabe **25.05.** in H16 *vor* der Vorlesung]

Am 13.05.2010 finden keine Tutorien statt (Himmelfahrt). Blatt 3 wird in den Tutorien vom 20.05.2010 diskutiert. In der Vorlesung vom 18.05.2010 werden keine Aufgabenbearbeitungen abgegeben und keine neuen Blätter ausgeteilt.

Rechenaufgabe: Divergenz und Rotation.

Sei

$$\vec{j} = xy^2\vec{e}_x + xyz\,\vec{e}_y + x^2z\,\vec{e}_z \ .$$

Bestimmen Sie $\nabla \cdot \vec{j}$, $\nabla(\nabla \cdot \vec{j})$, $\nabla \times \vec{j}$, $\nabla \times (\nabla \times \vec{j})$ (2 Punkte).

Aufgabe 1: Quellenfreie Funktionen.

(a) Sei $r := |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Verifizieren Sie die Gültigkeit der Gleichung (2 Punkte)

$$\nabla \cdot (\phi(r)\vec{r}) = 3\phi(r) + r\phi'(r) \ .$$

(b) Für welche $\phi(r)$ ist $\phi(r)\vec{r}$ quellenfrei (2 Punkte)?

(c) Wiederholen Sie Punkt (b) in zwei Dimensionen (2 Punkte).

Aufgabe 2: Harmonische Funktionen. Sei r wie in Aufgabe 1. Eine Funktion heißt „harmonisch“ falls sie die Gleichung $\nabla^2\phi = 0$ erfüllt.

(a) Verifizieren Sie die Gültigkeit der Gleichung (2 Punkte)

$$\nabla^2\phi(r) = \frac{2}{r}\phi'(r) + \phi''(r) \ .$$

[Hinweis: Die Ergebnisse der Aufgabe 2.3 könnten nützlich sein.]

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Gleichung $\nabla^2\phi(r) = 0$ (2 Punkte).

(c) Wiederholen Sie Punkt (b) in zwei Dimensionen (2 Punkte).

Aufgabe 3: Quellenfreie und wirbelfreie Strömung. Sei $r := |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{j} := \phi(r)(y\vec{e}_x - x\vec{e}_y)$ quellenfrei ist (2 Punkte).

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{j} := \phi(r)\vec{r}$ wirbelfrei ist (2 Punkte).

Aufgabe 4: Ableitungen von Produkten. Verifizieren Sie die Gültigkeit folgender Aussagen (jeweils 2 Punkte):

(a) $\nabla \times (\vec{E} \times \vec{B}) \ = \ \vec{E}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{E}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{E} - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{B}$;

(b) $\nabla(\vec{E} \cdot \vec{B}) \ = \ \vec{E} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{E}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{B}$;

(c) Das Kreuzprodukt zweier wirbelfreier Vektorfelder ist quellenfrei.