Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 3**	04.05.2010

[Abgabe 11.05. in H16 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 1: Eigenschaften des Vektorproduktes.

(a) Eine „Raumspiegelung" ist eine Koordinatentransformation $\vec{r} \to \vec{r}\,' := -\vec{r}$. Sei $\vec{v} := \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$. Wie benehmen sich $\vec{v}$ und $\vec{l} := \vec{r} \times \vec{v}$ in einer Raumspiegelung (2 Punkte)? [Die unterschiedlichen Fälle werden als „Vektor" und „axialer Vektor" bezeichnet.]

(b) Obwohl $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ gilt, ist im Allgemeinen $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. Ermitteln Sie, anhand der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ein Beispiel für eine Ungleichheit (2 Punkte).

Aufgabe 2: Spatprodukt.
Die Koordinaten des Ortsvektors, $\vec{r} = (x, y, z)$, werden als

$$x = r\, \sin\theta\, \cos\phi\ , \quad y = r\, \sin\theta\, \sin\phi\ , \quad z = r\, \cos\theta$$

parametrisiert. Wir definieren die Vektoren $\vec{e}_r := \partial_r \vec{r}$, $\vec{e}_\theta := \partial_\theta \vec{r}$, $\vec{e}_\phi := \partial_\phi \vec{r}$. Bestimmen Sie das Volumen des durch die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ gebildeten Parallelepipeds (6 Punkte).

Aufgabe 3: Doppeltes Vektorprodukt. Die Drehung eines starren Körpers wird durch ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ und eine Zentripetalbeschleunigung $\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ geprägt. Die Richtung von $\vec{\omega}$ bestimmt die Drehachse, und $|\vec{\omega}| = 2\pi/P$, wobei P die Drehperiode ist. Der Koordinatenursprung liege beim Schwerpunkt, z.B. Erdmittelpunkt.

(a) Skizzieren Sie $\vec{v}$ und $\vec{a}$ auf der Oberfläche einer Kugel von Radius R (3 Punkte).

(b) Bestimmen Sie $|\vec{a}|$ auf dem Breitengrad 45°, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Erdbeschleunigung, $g \approx 9,8$ m/s^2 (3 Punkte). [Benutzen Sie $R \approx 6400$ km.]

Aufgabe 4: Ableitungen von Skalar- und Vektorprodukten.

(a) Seien $\vec{u}(t)$ und $\vec{v}(t)$ zwei Raumkurven, und $c(t)$ eine reelle Funktion. Verifizieren Sie die Gültigkeit folgender Identitäten (3 Punkte):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\vec{u}) = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\vec{u} + c\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\ , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\ , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \times \vec{v} + \vec{u} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\ .$$

(b) Sei $\vec{r}(t)$ eine Raumkurve, $\vec{v}(t) := \mathrm{d}\vec{r}(t)/\mathrm{d}t$ der Geschwindigkeitsvektor, und $\vec{a}(t) := \mathrm{d}\vec{v}(t)/\mathrm{d}t$ der Beschleunigungsvektor. Wir bezeichnen auch $r := |\vec{r}|$, $v := |\vec{v}|$, $a := |\vec{a}|$, sowie $\vec{e}_r := \vec{r}/r$, $\vec{e}_v := \vec{v}/v$. Verifizieren Sie die Gültigkeit folgender Gleichungen (3 Punkte):

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \vec{e}_r \cdot \vec{v}\ , \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \vec{e}_v \cdot \vec{a}\ , \quad \vec{e}_v \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{e}_v}{\mathrm{d}t} = 0\ .$$

(c) Wir betrachten einen Massenpunkt in Drehbewegung (d.h. $r =$ const) in einer Ebene. Zeigen Sie, dass die Beschleunigung als

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_v - \frac{v^2}{r}\,\vec{e}_r$$

ausgedrückt werden kann (2 Punkte + 2 Extrapunkte). [Hinweis: Schreiben Sie $\vec{v} = v\,\vec{e}_v$; zeigen Sie, dass $\mathrm{d}\vec{e}_v/\mathrm{d}t$ parallel zu $\vec{e}_r$ ist; und bestimmen Sie den Betrag von $\mathrm{d}\vec{e}_v/\mathrm{d}t$ ausgehend von der Gleichung $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_v = 0$.]