Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 1**	15.04.2010

[Abgabe 20.04. in H16 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 1: Umgang mit komplexen Zahlen. Bestimmen Sie (jeweils 2 Punkte):

(a) $|z|$, $\arg z$, z^*, z^{-1} für $z = 1 + i$.

(b) z^2, $(z^*)^2$, zz^*, $\ln z$ für $z = 2 + 3i$.

(c) z^{-3}, z^{-2}, z^{-1}, z^4 für $z = -i$.

Aufgabe 2: Komplexe Funktionen.

(a) Ausgehend von der Euler-Formel, drücken Sie $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ mittels der Exponentialfunktion aus (2 Punkte).

(b) Zeigen Sie, dass $\exp(z + 2n\pi i) = \exp(z)$ gilt, wobei $n \in \mathbb{Z}$. Ermitteln Sie anhand dieser Tatsache ein Beispiel für einen Teilbereich der komplexen Ebene, auf dem die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion (Logarithmus) definiert werden kann (2 Punkte).

(c) Ermitteln Sie $\arccos z$ und $\arcsin z$ mittels des im (b) definierten Logarithmus (2 Punkte).

Aufgabe 3: Grundbegriffe der komplexen Analysis. Betrachtet wird eine komplexe Funktion $f = u + iv$ der komplexen Variable $z = x + iy$, wobei x, y, u, v reell sind.

(a) Zeigen Sie, dass $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen ($1\frac{1}{2}$ Punkte).

(b) Drücken Sie $f = u + iv$ mittels $z = x + iy$ und $z^* = x - iy$ aus ($1\frac{1}{2}$ Punkte).

(c) Zeigen Sie, dass wenn z in polarer Form ausgedrückt wird ($z = re^{i\varphi}$), die Cauchy-Riemann-Gleichungen die Formen

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

übernehmen (3 Punkte). [Hinweis: Schreiben Sie $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$ usw, und benutzen Sie die normalen Cauchy-Riemann-Gleichungen auf der rechten Seite.]

Aufgabe 4: Fundamentalsatz der Algebra.

(a) Sei $P_n(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass $[P_n(z)]^* = P_n(z^*)$ gilt, und dass deshalb die eventuellen komplexen Nullstellen unbedingt als komplex-konjugierte Paare vorkommen (2 Punkte).

(b) Ermitteln Sie die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ (2 Punkte).

(c) Ermitteln Sie die Lösungen der Gleichung $z^4 = -1$ (2 Punkte).