Einführung in die Methoden der theoretischen Physik I **Probeklausur** 01.02.2010

Keine Hilfsmittel. 4 Punkte / Aufgabe. 6 Punkte reichen zur Note 4,0.

Aufgabe 1: Die Funktion $y(x) \in \mathbb{R}$ wird durch die Gleichung

$$y^3 + x^3 + xy^2 + yx^2 = 0$$

bestimmt. Berechnen Sie $y(1)$ und $y'(1)$. [Hinweis: $y^3 + y^2 + y + 1 = (y+1)(y^2+1)$.]

Aufgabe 2: Die Parabel $x = y^2 - 2$ dreht sich um die x-Achse. Bestimmen Sie das von der Drehoberfläche und der Ebene $x = 0$ eingeschlossene Volumen.

Aufgabe 3: Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y' + y \cos x = \cos x \; .$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung sowie, durch Variation der Konstanten, eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Aufgabe 4: Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y'' + 4y' + 4ay = 0 \; , \quad a > 0 \; .$$

Wir unterscheiden sich (qualitativ) die Lösungen der Fälle $a < 1$ und $a > 1$? Welche ist die allgemeine Lösung für den Fall $a = 1$?

Aufgabe 5: Von einer Matrix M ist bekannt, dass sie die Gleichungen

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \; , \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Bestimmen Sie M. Ist M regulär?

Aufgabe 6: Bestimmen Sie $\exp(\theta[A,B])$, wobei $\theta \in \mathbb{R}$ und A, B die folgenden Matrizen sind:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; , \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; , \quad [A,B] := AB - BA \; .$$

$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0$	$\frac{\mathrm{d}\sinh x}{\mathrm{d}x} = \cosh x$	$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$	$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$
$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$	$\frac{\mathrm{d}\cosh x}{\mathrm{d}x} = \sinh x$	$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x$	$\det(AB) = \det(A)\det(B)$
$\frac{\mathrm{d}\ln\lvert x\rvert}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$	$\frac{\mathrm{d}\tanh x}{\mathrm{d}x} = 1-\tanh^2 x$	$\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x} = 1+\tan^2 x$	$(AB)^T = B^T A^T$
$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}x} = \mu\, x^{\mu-1}$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arsinh}\, x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$\frac{\mathrm{d}\exp\phi(x)}{\mathrm{d}x} = \phi'(x)e^{\phi(x)}$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arcosh}\, x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{\mathrm{d}\arccos x}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$
$\frac{\mathrm{d}\ln\lvert\phi(x)\rvert}{\mathrm{d}x} = \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{artanh}\, x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-x^2}$	$\frac{\mathrm{d}\arctan x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$	$\ln(\det(B)) = \mathrm{Sp}(\ln(B))$