4. Tensoren

[Lang & Pucker 10.1-3]

Orthogonale Basistransformationen (Seite 51):

$$v' = O^T v \quad \Leftrightarrow \quad v'_i = \sum_{j=1}^{n} O^T_{ij} v_j$$

$$M' = O^T M O \quad \Leftrightarrow \quad M'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} O^T_{ik} M_{kl} O_{lj} = \sum_{k,l=1}^{n} O^T_{ik} O^T_{jl} M_{kl} .$$

Das Ziel ist jetzt, diese Notation zu „Verbessern" und den Begriff der Basistransformationen zu verallgemeinern.

<u>Bezeichnungen:</u>

* Setze bei v_j den Index oben: $v^j|_{\text{neu}} := v_j|_{\text{alt}}$, $j=1,\dots,n$.
  Es geht dann um einen „<u>kontravarianten</u>" Vektor bzw. um einen <u>kontravarianten Tensor 1. Stufe</u>.

* Notation für die Transformation: $\Lambda^i{}_j := O^T_{ij}$.

* Führe die <u>Einsteinsche Summenkonvention</u> ein: wenn ein Index zweimal vorkommt, einmal unten und einmal oben, wird darüber summiert:
  $$\Lambda^i{}_j v^j := \sum_{j=1}^{n} \Lambda^i{}_j v^j .$$

* Die Matrix wird zum <u>kontravarianten Tensor 2. Stufe</u>:
  $$M^{ij}|_{\text{neu}} := M_{ij}|_{\text{alt}} .$$

Anhand dieser Bezeichnungen können die Transformationen also als

$$v'^i = \Lambda^i{}_j v^j \quad , \quad M'^{ij} = \Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_l M^{kl}$$

geschrieben werden.

<u>Definition:</u> „<u>Kovariante</u>" Vektoren bzw. Tensoren, mit Indizes <u>unten</u>, werden mit Hilfe des Kronecker-Symbols definiert:

$$v_i := \delta_{ij} v^j \left(= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v^j = v^i \right)$$

$$M_{ij} := \delta_{ik} \delta_{jl} M^{kl}$$

$$T_{ijk}{}^{mn} := \delta_{it} \delta_{js} \delta_{ku} T^{tsumn}$$

kontravarianter Tensor 5. Stufe

Tensor 5. Stufe mit 3 kovarianten und 2 kontravarianten Indizes.
(Zum Beispiel: $v_i M_{jk} v^m v^n$).

Die inverse Transformation:

$$\delta^{ij} := (\delta^{-1})_{ij} \quad , \quad \text{d.h.} \quad \delta^i{}_j = \delta^{ik} \delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\delta^{-1})_{ik} \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Wegen $\mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1}$ gilt $\delta^{ij} = \delta_{ij}$.

Die inverse Transformation: $v^i = \delta^{ij} v_j$,

d.h. Indizes können sowohl herauf- als auch heruntergezogen werden.

Transformationsgesetz für kovariante Indizes

$$T'{}^{\cdots}{}_{i}{}^{\cdots} = \delta_{ij}\, T'{}^{\cdots j \cdots} = \delta_{ij}\, \Lambda^j{}_k\, T^{\cdots k \cdots} = \delta_{ij}\, \Lambda^j{}_k\, \delta^{kl}\, T^{\cdots}{}_{l}{}^{\cdots} ,$$

d.h. $T'{}^{\cdots}{}_{i}{}^{\cdots} = \Lambda_i{}^l\, T^{\cdots}{}_{l}{}^{\cdots}$, mit $\Lambda_i{}^l = \delta_{ij}\Lambda^j{}_k\,\delta^{kl}$.

Invarianz: Ein Hauptgrund für die Einführung dieser Notation besteht darin, dass es damit leicht zu sehen ist, welche Größen invariant („skalar") sind.

Es gilt: $T'{}^{\cdots}{}_{i}{}^{\cdots i \cdots} = \Lambda_i{}^k\, \Lambda^i{}_l\, T^{\cdots}{}_{k}{}^{\cdots l}$.

Hier ist: $\Lambda_i{}^k \Lambda^i{}_l = \delta_{ij}\, \Lambda^j{}_m\, \delta^{mk}\, \Lambda^i{}_l = \sum_{j,m,i} \delta_{ij}\, O^T_{jm}\, \delta_{mk}\, O^T_{il}$

$$= \sum_i \underbrace{O_{li}}_{O^T_{il}}\, O^T_{ik} \underset{OO^T = \mathbb{1}}{=} \delta^k{}_l .$$

Insgesamt also $T'{}^{\cdots}{}_{i}{}^{\cdots i \cdots} = T^{\cdots}{}_{k}{}^{\cdots k}$; wenn Indizes „kontrahiert" werden, bekommt man eine skalare Größe!

D.h., $\boxed{\text{nur „frei" Indizes werden transformiert.}}$

Beispiele:

* Ein Vektor (als Ganzes) wird als $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$ geschrieben, und ist invariant.
* Ein Skalarprodukt zweier Vektoren ist auch invariant:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = v^i \vec{e}_i \cdot w^j \vec{e}_j = v^i w^j\, \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = v^i w^j \delta_{ij} = v^i w_i .$$

* Ebenso eine quadratische Form:

$$M = M^{ij}\, \underbrace{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j}_{\text{„Tensorprodukt"}} \Rightarrow \vec{v}\cdot M \cdot \vec{w} = v^k M^{ij} w^l\, \overbrace{\vec{e}_k\cdot\vec{e}_i}^{\delta_{ki}}\, \overbrace{\vec{e}_j\cdot\vec{e}_l}^{\delta_{jl}} = v_i M^{ij} w_j$$

* Die Komponenten v^i, M^{ij} usw sind nicht invariant.
* Eine Ausnahme: der Levi-Civita-Tensor ist ein „invarianter Tensor":

$$\varepsilon'_{ijk\ldots} = \Lambda_i{}^m \Lambda_j{}^n \Lambda_k{}^o \cdots \varepsilon_{mno\ldots}$$

$$\underset{(\sim \text{Seite } 41)}{\overset{!}{=}} \det(\Lambda)\, \varepsilon_{ijk\ldots}$$; Aufgabe 11.3(c) $\Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$.

Verallgemeinerungen: Falls δ_{ij} durch den „metrischen Tensor", g_{ij}, ersetzt wird, bekommen wir den Formalismus der Differentialgeometrie, welcher z.B. in der allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt.