## 3.4 Eigenwerte und Eigenvektoren [Lang & Pucker 3.4]

Eine lineare Abbildung verursacht in der Regel eine „Transformation" (z.B. Drehung, vgl. Aufgabe 10.3): $M\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \not\parallel \vec{w}$ (es sei denn, $M \propto \mathbb{1}$). Es gibt aber besondere Vektoren, die im Wesentlichen nicht transformiert werden.

**Definition** Falls $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ und $v \neq 0$ mit

$$Mv = \lambda v,$$

dann hat $M$ den Eigenvektor $v$ und den entsprechenden Eigenwert $\lambda$.

**Bemerkungen**

- $\exists\, v \neq 0$ mit $Mv = 0$ (d.h. $\det M = 0$)
  $\Rightarrow \lambda = 0$ ist ein Eigenwert, weil $0 \cdot v = 0$ gilt.
- $v$ ist nicht eindeutig: $\alpha v$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$, ist auch ein Eigenvektor mit demselben Eigenwert:
  $$M\alpha v = \alpha M v = \alpha\lambda v = \lambda \alpha v.$$
- $\mathbb{1} v = v \;\; \forall\, v \Rightarrow \lambda = 1$ für $M = \mathbb{1}$, und das System ist „entartet", d.h. es gibt $n$ linear unabhängige Eigenvektoren zum selben Eigenwert.
- $M_{ij} \in \mathbb{R}$, aber trotzdem $\lambda \in \mathbb{C}$ erlaubt! (Erklärung folgt.)

**Sätze** Die folgenden Aussagen sind äquivalent (d.h. „$\Leftrightarrow$"):

Seite 46:

(i) $M$ ist regulär, d.h. $M^{-1}$ existiert

(ii) $\det M \neq 0$

(iii) die Spalten bzw. Zeilen von $M$ sind linear unabhängig

(iv) $Mv = 0 \Rightarrow v = 0$

(v) $Mv_1 = Mv_2 \Rightarrow v_1 = v_2$

neu:

(vi) alle Eigenwerte sind $\neq 0$ !

[ Beweis: Äquivalenz (iv) $\Leftrightarrow$ (vi):

„$\Rightarrow$" $\nexists\, v \neq 0$ mit $Mv = 0$
$\Rightarrow \nexists\, v \neq 0$ mit $Mv = 0v$ $\square$

„$\Leftarrow$" $\nexists\, v \neq 0$ mit $Mv = 0v = 0$
$\Rightarrow Mv = 0$ impliziert $v = 0$ $\square$. ]

Wie können Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt werden?

$$M v = \lambda v \;, v \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (M - \lambda \mathbb{1}) v = 0 \;, v \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0} \; !$$

Bemerkungen:

* $\det(M - \lambda \mathbb{1}) = \Delta(m_1 - \lambda e_1, \ldots, m_n - \lambda e_n)$ ist ein Polynom des Grades $n$, $P_n(\lambda)$, und wird ein „charakteristisches Polynom" genannt.
* die Gleichung $P_n(\lambda) = 0$ heißt „Säkulargleichung".
* Fundamentalsatz der Algebra $\Rightarrow$ $P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Derselbe $\lambda_i$ kann auch mehrmals auftauchen. Weiterhin sind komplexe Paare möglich. Die $\lambda_i$'s sind die Eigenwerte.
* Nach Bestimmung von $\lambda_i$ kann der entsprechende $v^{(i)}$ aus $(M - \lambda_i \mathbb{1}) v^{(i)} = 0$ gefunden werden.
* Die konventionelle Normierung:

$$[v^{(i)}]^\dagger v^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} (v_k^{(i)})^* v_k^{(i)} = 1 .$$

Zur Erinnerung (Seite 39):

$$\underbrace{(\ldots)^\dagger}_{\text{„adjungiert"}} = ((\ldots)^T)^*$$

„transponiert" ; „komplex-konjugiert"

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \{-1, 2\}$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = -1}}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 2v_1 + v_2 = 0, \quad v_2 = -2v_1$$

$$\Rightarrow \quad v^{(1)} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Normierung: $[v^{(1)}]^\dagger [v^{(1)}] = v_1^2 (1+4) = 1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \quad v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\lambda_2 = 2}}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_1 - v_2 = 0, \quad v_2 = v_1$$

$$\Rightarrow \quad v^{(2)} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung: $[v^{(2)}]^\dagger [v^{(2)}] = v_1^2 (1+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

# Allgemeine Eigenschaften der Eigenwerte

* $\det M = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, d.h. Determinante ist Produkt von Eigenwerten.

Beweis: $P_n(\lambda) = \Delta(m_1 - \lambda e_1, \dots, m_n - \lambda e_n) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.

Nehme auf beiden Seiten Term der Ordnung $\lambda^0$

$$\Rightarrow \quad \Delta(m_1, \dots, m_n) = \underbrace{(-1)^{2n}}_{1} \lambda_1 \cdots \lambda_n \qquad \square$$

* $\mathrm{Sp}\, M = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, d.h. Spur ist Summe von Eigenwerten.

Beweis: $P_n(\lambda) = \Delta(m_1 - \lambda e_1, \dots, m_n - \lambda e_n) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.

Nehme auf beiden Seiten Terme der Ordnung $\lambda^{n-1}$ $\mathrm{Sp}\, M$!

$$\Rightarrow \quad (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \left[ \Delta(m_1, e_2, \dots, e_n) + \Delta(e_1, m_2, \dots, e_n) + \Delta(e_1, e_2, \dots, m_n) \right]$$

$$= (-1)^{n+1} \lambda^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$$

$$\Rightarrow \quad \square$$

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \det(M - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$

$$= \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc = \lambda^2 - \lambda\, \mathrm{Sp}(M) + \det(M).$$

Auf der anderen Seite: $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2$.

* Alle Eigenwerte sind invariant in einer orthogonalen Basistransformation.

Beweis: Seite 40: $M' = O^T M O$.

Sei $Mv = \lambda v$. Dann gibt es einen Vektor $v'$, nämlich $v' = O^T v$, so dass $M' v' = \lambda v'$:

$$M' v' = O^T M \underbrace{O O^T}_{\mathbb{1}} v = O^T M v = O^T \lambda v = \lambda O^T v = \lambda v'. \quad \square$$

* Satz von Cayley und Hamilton: jede $n \times n$ - Matrix $M$ erfüllt ihre Säkulargleichung, d.h. $P_n(M) = 0_{n \times n}$

Nullabbildung

Ansatz zum Beweis: Sei $v$ ein allgemeiner Vektor. Wir nehmen an, dass $v$ als Linearkombination von Eigenvektoren, $v^{(i)}$, ausgedrückt werden kann (?). Für jeden $v^{(i)}$ gilt:

$$P_n(M)\, v^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_n M^n v^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_n \lambda_i^n v^{(i)} = \underbrace{P_n(\lambda_i)}_{0} v^{(i)} = 0.$$

## Weitere Sätze

* Sei $M$ symmetrisch, $M^T = M$. Dann sind
  (i) die Eigenwerte reell, und
  (ii) die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten „orthogonal" zueinander, d.h. $[v^{(i)}]^+[v^{(j)}] = 0$ für $i \neq j$.

Beweis: (i) Sei $v$ ein Eigenvektor und $\lambda$ der entsprechende Eigenwert. Betrachte eine „quadratische Form" (vgl. Aufgabe 12.4):

$$v^+ M v = \lambda v^+ v .$$

Es gilt:

$$(v^+ M v)^+ \underset{(AB)^+ = B^+A^+}{=} v^+ M^+ v \underset{M \text{ reell und } M^T = M}{=} v^+ M v$$

$$\Rightarrow (\lambda v^+ v)^+ = \lambda v^+ v$$

$$\Leftrightarrow \lambda^* v^+ v = \lambda v^+ v \quad \Rightarrow \lambda^* = \lambda \quad \square .$$

(ii) $\underset{(a)}{M v^{(1)} = \lambda_1 v^{(1)}}$ ; $M v^{(2)} = \lambda_2 v^{(2)}$

adjungiere $\Leftrightarrow$ $[v^{(2)}]^+ M = \lambda_2 [v^{(2)}]^+ \quad (b)$

Es gilt:

$$[v^{(2)}]^+ M v^{(1)} \underset{(a)}{=} \lambda_1 [v^{(2)}]^+[v^{(1)}] \underset{(b)}{=} \lambda_2 [v^{(2)}]^+[v^{(1)}]$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad [v^{(2)}]^+[v^{(1)}] = 0 \quad . \quad \square .$$

Bemerkung: dieselben Aussagen gelten auch für komplexe Matrizen, falls diese „hermitesch" sind, d.h. $M^+ = M$ erfüllen.

* Sei $M$ orthogonal, $\underset{(a)}{M^T M = \mathbb{1}}$. Dann gilt $|\lambda| = 1$.

Beweis:

$$\underset{(b)}{M v = \lambda v} \quad \underset{\substack{\text{adjungiere und} \\ \text{benutze } M^+ = M^T \\ \text{für } M \text{ reell}}}{\Rightarrow} \quad \underset{(c)}{v^+ M^T = v^+ \lambda^*}$$

$$\Rightarrow v^+ M^T M v \underset{(a)}{=} v^+ v \underset{(b)\&(c)}{=} \lambda^* \lambda \, v^+ v \quad \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \quad \square$$

Bemerkung: dieselbe Aussage gilt auch für eine komplexe Matrix, falls diese „unitär" ist, d.h. $M^+ M = \mathbb{1}$ erfüllt.

— · —