3.3 Inverse Matrix [Lang & Pucker 3.2]

Betrachte Komposition (Seite 38): $(M \circ N)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} N_{kj}$.
(Wenn wir eine Basis gewählt haben und mit Matrizen („Vierecken") umgehen, wird „$\circ$" oft nicht explizit gezeigt.) Falls $\exists\, N$ so dass

$$NM = MN = \mathbb{1}_{n \times n}$$

gilt, dann ist N die <u>Inverse</u> von M; sie wird mit M^{-1} bezeichnet.

<u>Sätze:</u> * $NM = \mathbb{1} \Rightarrow MN = \mathbb{1}$

[Beweis: $w = Mv$ | operiere mit N auf beiden Seiten

$\Rightarrow \underbrace{Nw = \overset{\mathbb{1}}{\widehat{NM}} v = v}$

Es folgt: $w = Mv = MNw \quad \forall\, w$

$\Rightarrow (MN)_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow MN = \mathbb{1}$ □]

* M^{-1} existiert $\Rightarrow$ M^{-1} ist eindeutig.

[Seien N' und N Inversen von M. Dann gilt:

$N' = N' \mathbb{1} = N'(MN) = (N'M)N = \mathbb{1} N = N$ □.]

{ Falls M^{-1} existiert, wird M „nichtsingulär" bzw. „regulär" bzw. „invertierbar" genannt.

* $(M^{-1})^{-1} = M$.

[$MM^{-1} = \mathbb{1}$ □.]

* $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

[$N^{-1}M^{-1}MN = N^{-1}\mathbb{1}N = \mathbb{1}$ □]

<u>Beispiele:</u> * Für eine orthogonale Matrix gilt $O^T O = O O^T = \mathbb{1}$,
d.h. $O^{-1} = O^T$.

[Für eine unitäre Matrix gilt $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$,
d.h. $U^{-1} = U^\dagger$]

* Für $\mathfrak{z}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
d.h. $\mathfrak{z}_1^{-1} = \mathfrak{z}_1$.

Wie findet man M^{-1} im Allgemeinen?

(i) theoretisch: durch Adjunkte und Determinante (verwandt mit Laplace / Seite 42)

Seite 41: $\det M = \sum_{j_1,\dots,j_n} \varepsilon_{j_1\cdots j_n} M_{1j_1} \cdots M_{nj_n}$ (Summe über Spalten)

$= \sum_{i_1,\dots,i_n} \varepsilon_{i_1\cdots i_n} M_{i_1 1} \cdots M_{i_n n}$ (Summe über Zeilen)

Betrachte Abhängigkeit der Determinante von Elementen der Zeile i:

$$f(i) := \sum_{j_1,\dots,j_n} \varepsilon_{j_1\cdots j_n} M_{1j_1} \cdots M_{ij_i} \cdots M_{nj_n} .$$

Falls $M_{ij_i} \to M_{kj_i}$, mit $k \neq i$, verschwindet das Ergebnis wegen Antisymmetrie (vgl. Gauß-Algorithmus auf Seite 42). Das heisst,

$$f(k) = \delta_{ki} \cdot \det M$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j_i} M_{kj_i} \underbrace{\sum_{j_1,\dots,\hat{j_i},\dots,j_n} \varepsilon_{j_1\cdots j_n} M_{1j_1} \cdots \hat{M}_{ij_i} \cdots M_{nj_n}}_{=:\ (\mathrm{adj}(M))_{j_i i} \ =\ (\mathrm{cof}(M))_{ij_i}} = \delta_{ki} \cdot \det M \quad \forall k,i$$

„nicht da"

„nicht da"

Adjunkte = $(\text{Kofaktor})^T$ (vgl. Seite 42)

$$\Leftrightarrow \sum_{j_i} M_{kj_i} (\mathrm{adj}(M))_{j_i i} = (\mathbb{1}_{n\times n})_{ki} \cdot \det M \qquad \forall k,i \in \{1,\dots,n\}$$

Satz: $\det M \neq 0 \Leftrightarrow M$ ist regulär (d.h. $\exists M^{-1}$)

Beweis: „$\Rightarrow$" Dividiere obige Gleichung durch $\det M$

$$\Rightarrow \boxed{M^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(M)}{\det(M)}}$$

„$\Leftarrow$" M ist regulär $\Leftrightarrow \exists M^{-1}$ mit $MM^{-1} = \mathbb{1}$

Nehme Determinante auf beiden Seiten

$\Rightarrow \det(M)\det(M^{-1}) = 1$.

Weil M^{-1} existiert, ist $\det(M^{-1}) \neq \infty$, und deshalb gilt unbedingt $\det(M) \neq 0$. □

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\varepsilon_{12} = +1$, $\varepsilon_{21} = -1$.

$\mathrm{cof}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

$\mathrm{adj}(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $\qquad \det(M) = ad - bc$

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

(ii) in der Praxis: durch den Gauß-Jordan-Algorithmus. (verwandt mit Gauß / Seite 42)

$$M v = \mathbb{1} w \qquad \Big|\ \text{„multipliziere" vom links mit } M^{-1} \text{ (falls diese existiert)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{1} v = M^{-1} w$$

Das heisst, wenn es uns gelingt, mit Methoden wie für die Determinante auf Seite 42 (Summierung und Skalierung von Zeilen) die Matrix M in eine Einheitsmatrix umzuformen, geht die Einheitsmatrix gleichzeitig in die inverse Matrix M^{-1} über!

Beispiel:

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M^{-1} = ?$$

Setze M und $\mathbb{1}$ nebeneinander:

$$\begin{array}{l} \\ \times 2 + (-1)\,1. \\ \times 2 + (-3)\,1. \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{„benutze 1. Zeile"}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \times 1 + (-3)\,2. \\ \\ \times 1 + (7)\,2. \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{„benutze 2. Zeile"}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \times 3 + (2)\,3. \\ \times 2 + (-1)\,3. \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -10 & 14 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{„benutze 3. Zeile"}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \times \frac{1}{6} \\ \times \frac{1}{2} \\ \times \frac{1}{6} \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -8 & 10 & 4 \\ 8 & -10 & -2 \\ -10 & 14 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{„skaliere"}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 12 & -15 & -3 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}}_{M^{-1}\,!}$$

Check:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 12 & -15 & -3 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4\cdot 2+5\cdot 1+2\cdot 3 & -4\cdot 3+5\cdot 2+2\cdot 1 & -4\cdot 5+5\cdot 4+2\cdot 0 \\ 12\cdot 2-15\cdot 1-3\cdot 3 & 12\cdot 3-15\cdot 2-3\cdot 1 & 12\cdot 5-15\cdot 4-3\cdot 0 \\ -5\cdot 2+7\cdot 1+1\cdot 3 & -5\cdot 3+7\cdot 2+1\cdot 1 & -5\cdot 5+7\cdot 4+1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ok!}$$

Anwendungen

Ausgangspunkt vieler Anwendungen von Determinanten und inversen Matrizen ist ein wichtiger Satz:

M ist regulär (d.h. M^{-1} existiert, d.h. $\det M \neq 0$) $\Leftrightarrow$ die Gleichung $Mv = 0$ hat nur die „triviale" Lösung $v = 0$.

Beweis: „$\Rightarrow$": $Mv = 0$ | „multipliziere" vom links mit M^{-1}

$\Rightarrow v = M^{-1} 0 = 0$.

„$\Leftarrow$" (teilweise): Sei $w = Mv$. Dann ist v eindeutig: $Mv_1 = Mv_2 \Rightarrow M(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$. Wir können also die Umkehroperation $v = M^{-1} w$ definieren. (Um genau zu sein, wurde hier nur „Injektivität" bewiesen.)

Es folgt:

* das lineare Gleichungssystem $Mv = w$ hat eine eindeutige Lösung, $v = M^{-1} w$, genau dann wenn $\det M \neq 0$ gilt.

* falls dagegen $\det M = 0$ gilt, gibt es auch nichttriviale Spaltenvektoren $v_a \neq 0$ die die Gleichung $Mv_a = 0$ erfüllen. Das heisst, die allgemeine Lösung enthält unbestimmte Konstanten, $v = \sum_a C_a v_a + v_s$, wie bei linearen Differenzialgleichungen.

* Seien $\vec{m}_i$; $i = 1, \ldots, n$, Vektoren. Sie sind linear unabhängig genau dann, wenn $\Delta(\vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_n) \neq 0$ gilt.

Beweis: die definierende Gleichung $\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{m}_i = \vec{0}$ kann als

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(die Komponenten von $\vec{m}_1$ als Spaltenvektor)

geschrieben werden; die einzige Lösung ist $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, falls Determinante ungleich null ist. $\square$