3.2 Matrizen, Spur, Determinante [Lang & Pucker 3.1]

Seite 38: Nach Wahl einer Basis kann eine lineare Abbildung als Matrix dargestellt werden:

$$M\vec{v} = \vec{w} \quad \Rightarrow \quad M_{ij} := (M)_{ij} := \vec{e}_i \cdot M\vec{e}_j \quad (= \langle e_i | M | e_j \rangle \text{ „Dirac-Notation"})$$

Wir betrachten im Folgenden M als „Viereck", mit Komponenten M_{ij}. (Zeile, Spalte)

Definitionen: die transponierte Matrix wird als

$$(M^T)_{ij} := (M)_{ji} = M_{ji}$$

definiert. Für Vektoren:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^T = (v_1 \cdots v_n)$$

Spaltenvektor — Reihenvektor

Notabene: $\vec{w} := \sum_i w_i \vec{e}_i$
Spaltenvektor: $w := \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

Es gilt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = (v_1 \cdots v_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v^T w$.

Eine Matrix ist
- symmetrisch falls $M^T = M$, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- antisymmetrisch falls $M^T = -M$, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Sätze:

* $(M^T)^T = M$
* $(M+N)^T = M^T + N^T$
* $(M \circ N)^T = N^T \circ M^T$ [Beweis: Seite 38: $(M \circ N)_{ij} = \sum_k M_{ik} N_{kj}$ $\Rightarrow (M \circ N)^T_{ij} = \sum_k M_{jk} N_{ki} = \sum_k (N^T)_{ik} (M^T)_{kj}$ $\square$]

(wird normalerweise nicht gezeigt)

(**Verallgemeinerung:**

* die konjugierte Matrix: $(M^*)_{ij} := (M_{ij})^*$ ← Komplex-Konjugierung
* die adjungierte Matrix: $(M^+)_{ij} := (M_{ji})^*$, d.h. $M^+ = (M^*)^T$.
* eine Matrix ist
  - hermitesch falls $M^+ = M$, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
  - antihermitesch falls $M^+ = -M$, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.)

Die transponierten Matrizen spielen eine wichtige Rolle bei Drehungen.
Eine Drehung := eine lineare Abbildung, die das Skalarprodukt zwischen zweier Vektoren invariant lässt:

$$M\vec{x} \cdot M\vec{y} = (Mx)^T My = x^T M^T M y \stackrel{!}{=} x^T y \quad \forall \vec{x}, \vec{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad M^T M = \mathbb{1}$$

Eine Matrix mit dieser Eigenschaft wird orthogonal genannt.
(Verallgemeinerung: $M^+ M = \mathbb{1} \Rightarrow M$ ist unitär.)

(Für Basisvektoren: $\vec{e}_i' := M\vec{e}_i$

$$\Rightarrow \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{falls } M^T M = \mathbb{1} \text{ gilt}$$

$\Rightarrow \{\vec{e}_i'\}$ bilden eine andere orthonormierte Basis!)

Definition: die Spur einer Matrix wird als

$$\mathrm{Sp}\, M := \sum_{i=1}^{n} M_{ii}$$

definiert. (Eine andere Bezeichnung: $\mathrm{tr}\, M$)

Sätze:

* $\mathrm{Sp}\, M^T = \mathrm{Sp}\, M$ $\quad \left[\mathrm{Sp}\, M^T = \sum_i (M^T)_{ii} = \sum_i M_{ii} = \mathrm{Sp}\, M \right]$
* $\mathrm{Sp}(MN) = \mathrm{Sp}(NM)$ $\quad \left[\mathrm{Sp}(MN) = \sum_{i,k} M_{ik} N_{ki} = \sum_{i,k} N_{ki} M_{ik} = \mathrm{Sp}(NM) \right]$
* Spur ist invariant in einer orthogonalen Basistransformation.

$$\vec{e}_i' := O\vec{e}_i \quad ; \quad O^T O = \mathbb{1} \qquad \begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

In neuer Basis:

$$M'_{ij} = \vec{e}_i' \cdot M\vec{e}_j' = e_i'^T M e_j' = (Oe_i)^T MOe_j$$
$$= e_i^T O^T M O e_j = (O^T M O)_{ij}$$
$$\Rightarrow \mathrm{Sp}[M'] = \mathrm{Sp}[O^T M O] \underset{\mathrm{Sp}(MN)=\mathrm{Sp}(NM)}{=} \mathrm{Sp}[OO^T M] \underset{\text{Aufgabe 10.2: } OO^T = \mathbb{1}}{=} \mathrm{Sp}[M].$$

Definition: Wir drücken M als $M = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix} = (m_1, \dots, m_n)$ aus.

$\hookrightarrow$ Spaltenvektoren

Die Determinante $\det M \in \mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$\det M = \Delta(m_1, \dots, m_n)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\Delta(m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_n) = -\Delta(m_1, \dots, m_j, \dots, m_i, \dots, m_n)$ } antisymmetrisch

(2) $\Delta(m_1, \dots, \lambda m_i, \dots, m_n) = \lambda\, \Delta(m_1, \dots, m_i, \dots, m_n)$ } linear

(3) $\Delta(m_1, \dots, m_i + m_j, \dots, m_n) = \Delta(\dots, m_i, \dots) + \Delta(\dots, m_j, \dots)$ } linear

(4) $\Delta(e_1, \dots, e_n) = \det \mathbb{1} = 1$ } normiert

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \Delta(a_{11} e_1 + a_{21} e_2,\ a_{12} e_1 + a_{22} e_2)$$

$$\underset{\text{Linearität}}{=} a_{11} a_{12}\, \Delta(e_1, e_1) + a_{21} a_{12}\, \Delta(e_2, e_1) + a_{11} a_{22}\, \Delta(e_1, e_2) + a_{21} a_{22}\, \Delta(e_2, e_2)$$

Antisymmetrie: $\Delta(e_1, e_1) = -\Delta(e_1, e_1) = 0$!
$\Delta(e_2, e_1) = -\Delta(e_1, e_2)$

$$= (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})\, \Delta(e_1, e_2)$$

$$\underset{\text{Normierung}}{=} a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Sätze:

* Sei $\varepsilon_{i_1 \cdots i_n}$ das „<u>Levi-Civita-Symbol</u>"

$$\varepsilon_{i_1 \cdots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i_1, i_2, \ldots, i_n) = (1,2,\ldots,n) \text{ oder eine symmetrische Permutation davon, d.h. mit einer geraden Anzahl von Vertauschungen} \\ -1, & \text{falls } (i_1, i_2, \ldots i_n) \text{ aus } (1,2,\ldots,n) \text{ durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen entsteht} \\ 0, & \text{falls es zwei (oder mehrere) gleiche Indizes gibt.} \end{cases}$$

Zum Beispiel: $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$, $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{22} = 0$.

Dann gilt: $$\det M = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} M_{i_1 1} M_{i_2 2} \cdots M_{i_n n}.$$

$$\left[\begin{aligned} \Delta(m_1, \ldots, m_n) &= \sum_{i_1 \ldots i_n} \Delta(M_{i_1 1} e_{i_1}, \ldots, M_{i_n n} e_{i_n}) \\ &\overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{i_1, \ldots, i_n} M_{i_1 1} \cdots M_{i_n n} \Delta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \\ &\overset{\text{Antisymmetrie}}{=} \sum_{i_1, \ldots, i_n} M_{i_1 1} \cdots M_{i_n n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \underbrace{\Delta(e_1, \ldots, e_n)}_{= 1 \text{ wegen Normierung}} \quad \square \end{aligned} \right]$$

(* Es gilt auch: $$\det M = \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \ldots i_n} \sum_{j_1, \ldots, j_n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} M_{i_1 j_1} \cdots M_{i_n j_n}.$$)

* $\det M^T = \det M$

$$\left[\det M^T = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \underbrace{\varepsilon_{i_1 \cdots i_n}}_{(-1)^\gamma} \underbrace{M_{1 i_1} M_{2 i_2} \cdots M_{n i_n}}_{\substack{\text{umordne jeden Term so dass der zweite Index nach rechts wächst.} \\ \text{Die ersten Indizes sind dann in einer gerade } (\gamma=0) \text{ oder ungerade } (\gamma = 1) \\ \text{permutierten Reihenfolge.}}} \quad \square \right]$$

* $\det(M \circ N) = \det M \cdot \det N$.

$$\left[\begin{aligned} M &= (m_1, \ldots, m_n) \quad ; \quad \det M = \Delta(m_1, \ldots, m_n) \; ; \\ M \circ N &= \Big(\underbrace{\sum_{i_1} m_{i_1} N_{i_1 1}}_{\text{Spalte}}, \sum_{i_2} m_{i_2} N_{i_2 2}, \ldots \sum_{i_n} m_{i_n} N_{i_n n} \Big) \\ \det(M \circ N) &\overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{i_1, \ldots i_n} \Delta(m_{i_1}, \ldots, m_{i_n}) N_{i_1 1} \cdots N_{i_n n} \\ &\overset{\text{Antisymmetrie}}{=} \sum_{i_1, \ldots, i_n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \Delta(m_1, \ldots, m_n) N_{i_1 1} \cdots N_{i_n n} \\ &= \underbrace{\Big(\sum_{i_1, \ldots i_n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} N_{i_1 1} \cdots N_{i_n n} \Big)}_{\det N} \cdot \underbrace{\Delta(m_1, \ldots, m_n)}_{\det M} \end{aligned} \right]$$

* Determinante ist <u>invariant</u> in einer <u>orthogonalen</u> <u>Basistransformation</u>.

$$\left[\begin{aligned} \det M' &= \det(O^T M O) = \det O^T \det M \det O \\ &= \det O^T \det O \det M = \underbrace{\det(\underbrace{O^T O}_{\mathbb{1}})}_{1} \det M. \quad \square \end{aligned} \right]$$

Wie bestimmt man die Determinante in der Praxis?

Methode 1: „Laplacescher Entwicklungssatz": $\det M = \sum_{i=1}^{n} M_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} \det \hat{M}_{ij}}_{\text{„Kofaktor"}}$, j beliebig

$\hat{M}_{ij}$: wie M_{ij} aber Zeile i und Spalte j weggenommen

(kann auch i fixieren und über j summieren)

[Aus der Definition:

$$\det M = \sum_{i_1,\dots,i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} M_{i_1 1} \cdots M_{i_n n}$$

$$= \sum_{i_j=1}^{n} M_{i_j j} \underbrace{\sum_{i_1,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_n} \underbrace{\varepsilon_{i_1 \dots i_n}}_{\pm 1 \text{ je nach Permutation}} M_{i_1 1} \cdots \hat{M}_{i_j j} \cdots M_{i_n n}}_{\pm \det \hat{M}_{i_j j}}$$

„weg" ($\hat{i}_j$); „ohne $M_{i_j j}$" ($\hat{M}_{i_j j}$)]

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} =: \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

↑ wähle diese Spalte

$$= 1 \cdot (5 \cdot 0 - 8 \cdot 6) - 4 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 8) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3)$$

$$= -48 + 96 - 21 = 96 - 69 = \underline{27}$$

Methode 2: „Gauß-Algorithmus"

Kann zu jeder Spalte [bzw. Zeile] eine beliebige Linearkombination anderer Spalten [bzw. Zeilen] hinzufügen, um die Determinante zu vereinfachen.

[$$\Delta(m_1, \dots, m_i + \sum_{k \neq i} c_k m_k, \dots, m_n) = \Delta(m_1, \dots, m_i, \dots, m_n) + \sum_{k \neq i} c_k \Delta(m_1, \dots, m_k, \dots, m_n)$$

verschwindet wegen Antisymmetrie]

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-4) \\ \cdot(-7) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 1 (-3)(-9) = 27.$$

Falls eine Spalte oder Zeile verschwindet, ist $\det = 0$.

Bei großen Matrizen (in der Regel schon $n \geq 4$) ist die zweite Methode viel effektiver als die erste Methode.

—— ∘ ——