3. Lineare Algebra

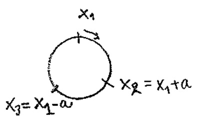
3.1 Vektorräume, lineare Abbildungen [Lang & Pucker 3.3]

Lineare Differenzialgleichung: $\underbrace{L}_{\text{Diff.operator}}\ \underbrace{y(x)}_{\text{Funktion}} = \underbrace{f(x)}_{\text{Funktion}}$

Diese allgemeine Struktur taucht sehr häufig auf: $\underbrace{M}_{\text{lineare Abbildung bzw. „Matrix"}}\ \underbrace{\vec{v}}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\vec{w}}_{\text{Vektor}}$

Beispiele:

* „diskretisierte" lineare Differenzialgleichung bzw. Differenzgleichung

$x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ 

$; \quad L\,y(x) := \frac{dy}{dx} \longrightarrow \frac{y(x+a) - y(x-a)}{2a}$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{y(x_1+a) - y(x_1-a)}{2a} &= f(x_1) \\ \frac{y(x_2+a) - y(x_2-a)}{2a} &= f(x_2) \\ \frac{y(x_3+a) - y(x_3-a)}{2a} &= f(x_3) \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} 0\cdot y(x_1) + \tfrac{1}{2a}\,y(x_2) - \tfrac{1}{2a}\,y(x_3) &= f(x_1) \\ -\tfrac{1}{2a}\,y(x_1) + 0\cdot y(x_2) + \tfrac{1}{2a}\,y(x_3) &= f(x_2) \\ +\tfrac{1}{2a}\,y(x_1) - \tfrac{1}{2a}\,y(x_2) + 0\cdot y(x_3) &= f(x_3) \end{aligned}\right.$$

Neue Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{1}{2a} & 0 & +\frac{1}{2a} \\ +\frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ y(x_3) \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix}}_{\vec{w}}$$

* Partialbruchzerlegung bzw. lineare Gleichungssysteme

$$\frac{1}{(1+x)^2\,x} = \underbrace{\frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{x}}_{} \quad ; \quad A, B, C = ?$$

$$\frac{1}{(1+x)^2 x}\left\{x\cdot A + x(1+x)\cdot B + (1+x)^2 C\right\}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2 x}\left\{x(A+B+2C) + x^2(B+C) + C\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} A + B + 2C &= 0 \\ B + C &= 0 \\ C &= 1 \end{aligned}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}}$$

* Drehungen $\rightarrow$ Aufgabe 10.3.

Die „Vektoren" dieser Konstruktion bilden einen <u>Vektorraum</u>, V.
Einige wichtige Eigenschaften von V sind:

* $\vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v}+\vec{w} \in V$ („Addition")
* $a \in \mathbb{R},\ \vec{v} \in V \Rightarrow a\vec{v} \in V$ („Skalarmultiplikation")
* $\exists\ \vec{0} \in V$ so dass $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$ („Nullvektor")
* $\exists\ -\vec{v} \in V$ so dass $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in V$ („inverser Vektor")
*

(Es gibt auch weitere mathematische Axiome, die aber in den praktischen Anwendungen „automatisch" erfüllt sein werden.)

Wir können Additionen und Skalarmultiplikationen mehrmals durchführen, und so eine <u>Linearkombination</u> bilden: $\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i \in V$.

Die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sind <u>linear unabhängig</u>, falls gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i = \vec{0} \iff a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

(Falls dagegen $a_j \neq 0$ gefunden werden kann, kann $\vec{v}_j$ als Linearkombination von $\vec{v}_i$, $i \neq j$, ausgedrückt werden: $\vec{v}_j = -\frac{1}{a_j} \sum_{i \neq j} a_i \vec{v}_i$.)

Falls die Vektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$
(i) linear unabhängig sind;
(ii) den Vektorraum V „aufspannen",
d.h. $\forall\ \vec{v} \in V$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ ausgedrückt werden,

dann bilden sie eine „<u>Basis</u>" bzw. ein „<u>Fundamentalsystem</u>".
Die <u>Dimension</u> des Vektorraums ist $\dim V = n$
(d.h. die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren).

Nach der Wahl einer Basis kann jeder Vektor <u>eindeutig</u> als $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$ ausgedrückt werden.

[Beweis: $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{e}_i \Rightarrow \vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i) \vec{e}_i \underset{\text{lineare Unabhängigkeit}}{\Rightarrow} v_i = w_i \quad \forall\ i = 1, \dots, n.$]

Die Wahl der Basis selbst ist aber <u>nicht</u> eindeutig.

[Beispiel: falls $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ eine Basis ist, ist $\{\vec{e}_1' := \vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{e}_2' := \vec{e}_1 - \vec{e}_2\}$ eine andere Möglichkeit, wie durch Betrachtung von (i) und (ii) gezeigt werden kann.]

Der „normale Raum", $\mathbb{R}^3$, ist auch ein Vektorraum.
Basisvektoren: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \to \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ oder $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

In vielen Vektorräumen kann eine weitere Struktur definiert werden, ein <u>Skalarprodukt</u>; dieses ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$, mit den Eigenschaften

* $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ („kommutativ")
* $\vec{v} \cdot (a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2) = a_1 \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + a_2 \vec{v} \cdot \vec{w}_2$ („linear")
* $|\vec{v}|^2 := \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ ($|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ „die Norm")
* $|\vec{v}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

Es folgt:

* $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}|$ „Cauchy-Schwarzsche Ungleichung"

[Beweis: $0 \leq (\lambda \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\lambda \vec{v} + \vec{w}) = \lambda^2 |\vec{v}|^2 + 2\lambda \vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2$.
Wähle $\lambda = -\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|^2}$ und multipliziere mit $|\vec{v}|^2 > 0$.

$$\Rightarrow 0 \leq (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 + |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2$$
$$\Leftrightarrow (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 \leq |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 \Rightarrow |\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}| \quad \square.]$$

* $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$ „Dreiecksungleichung"

[Beweis: $|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2 \leq |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v} \cdot \vec{w}| + |\vec{w}|^2$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{w}| + |\vec{w}|^2 = (|\vec{v}| + |\vec{w}|)^2.]$$

Zwei Vektoren sind <u>orthogonal</u> zueinander, falls $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ gilt.
Eine Basis ist orthogonal, falls $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ für $\forall\ i \neq j$ gilt.
Wenn auch $|\vec{e}_i| = 1 \ \forall i = 1, \ldots, n$, geht es um eine <u>orthonormale Basis</u>.

[Eine orthonormale Basis kann, ausgehend von einer beliebigen Basis, $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$, durch das „<u>Gram-Schmidt-Verfahren</u>" konstruiert werden:

$$\vec{b}_1 := \vec{a}_1 \ ; \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2} \vec{b}_1 \ ; \quad \vec{b}_k = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\vec{a}_k \cdot \vec{b}_i}{|\vec{b}_i|^2} \vec{b}_i \ .$$

Nachher noch $\vec{e}_i := \frac{\vec{b}_i}{|\vec{b}_i|}$.]

In einer orthonormalen Basis gilt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \Big(\sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^n w_j \vec{e}_j\Big) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{\text{„Kronecker-Symbol"}\ \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}} = \sum_{i=1}^n v_i w_i \ .$$

Einen <u>Winkel</u> zwischen zweier Vektoren können wir jetzt durch

$$\cos\theta := \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$

definieren; wegen Cauchy-Schwarz gilt $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

— · —

Mit Hilfe der eingeführten Begriffe kehren wir zu linearen Abbildungen bzw. Matrizen zurück:

$$M: \; V \to V \;, \quad \vec{v} \mapsto \vec{w} = M\vec{v} \;.$$

Das Ziel ist es, die auf Seite 35 eingeführte Notation zu begründen.

Wir benutzen eine besondere orthonormale Basis $\{\vec{e}_i\}$: $\quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$.

Linearität impliziert:

$$\vec{w} = \sum_{k=1}^{n} w_k \vec{e}_k = M\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \, M\vec{e}_j \;.$$

Nehme Skalarprodukt mit $\vec{e}_i$ und benutze $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$

$$\Rightarrow \quad w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot M\vec{e}_j}_{=:\, M_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} v_j$$

Notation:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}v_1 + \dots + M_{1n}v_n \\ \vdots \\ M_{n1}v_1 + \dots + M_{nn}v_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1j} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{i1} & \cdots & M_{ij} & \cdots & M_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nj} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Zeile i $\qquad$ Spalte j

Spaltenvektor

Besondere Beispiele:

„Nullmatrix" $= O_{n\times n} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$; $\quad O_{n\times n}\vec{v} = \vec{0} \;\; \forall \vec{v}$.

„Einheitsmatrix" $= \mathbb{1}_{n\times n} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$; $\quad \mathbb{1}_{n\times n}\vec{v} = \vec{v} \;\; \forall \vec{v}$

Die Matrizen bilden selbst einen (abstrakten) Vektorraum:

$$(M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij} \;;$$
$$(aM)_{ij} = a \cdot M_{ij} \;;$$
$$(0)_{ij} = 0 \quad \forall\, i,j \;;$$
$$(-M)_{ij} = -M_{ij} \;.$$

Es gibt aber auch eine zusätzliche Struktur, Komposition:

$$(M \circ N)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} N_{kj} \qquad i\begin{pmatrix} \longrightarrow \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \downarrow \end{pmatrix}_{j}$$

[Beweis: $\quad (M\circ N)_{ij} = \vec{e}_i \cdot (M\circ N)\vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot (M(\underbrace{N\vec{e}_j}_{\sum_k \vec{e}_k N_{kj}}))$

$$= \sum_k \underbrace{\vec{e}_i \cdot M\vec{e}_k}_{M_{ik}} N_{kj} \;.$$]

Die Existenz dreier Strukturen (Summe, Skalarmultiplikation, Komposition) definiert eine „Algebra".