2.7 Lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung [Lang & Pucker 6.3]

DGs zweiter Ordnung, $G(y'', y', y, x) = 0$, sind im Allgemeinen schwieriger als DGs erster Ordnung, es sei denn, sie können als DGs erster Ordnung umgeschrieben werden!

Beispiele: (i) $G(y'', y', x) = 0$, d.h. keine Abhängigkeit von y.
Führe neue abhängige Variable $z := y'$ ein: $y'' = z'$.
$\Rightarrow$ $G(z', z, x) = 0$, d.h. DG erster Ordnung.
Nachher noch y durch Integration: $y(x) = \int^x dt\, z(t)$.

(ii) $G(y'', y', y) = 0$, d.h. keine Abhängigkeit von x.
Sei wieder $z := y'$; außerdem gilt $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$.
$\Rightarrow$ $G\left(\frac{dz}{dy} z, z, y\right) = 0$, d.h. DG erster Ordnung.
Nachher noch y aus $\frac{dy}{dx} = z(y)$ $\Rightarrow$ $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\tilde{y}}{z(\tilde{y})} = \int_{x_0}^{x} d\tilde{x}$.
$\Rightarrow$ Aufgabe 9.4 !

Im Folgenden beschränken wir uns auf lineare DGs zweiter Ordnung:

$$y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right)}_{L} y(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{inhomogener Term}}$$

Im Gegensatz zur Seite 29 gibt es hier keine explizite Lösung.
(Vielmehr werden viele spezielle Funktionen als Lösungen von besonderem L definiert.)
Trotzdem können viele allgemeine Aussagen über die Lösungen gemacht werden:

(i) allgemeine Lösung der inhomogenen DG
= allgemeine Lösung der homogenen DG ($Ly = 0$)
+ spezielle Lösung der inhomogenen DG.

Beweis: wie auf Seite 29.

(ii) $Ly = 0$ führt zu zwei Integrationskonstanten (weil 2. Ordnung); ihre allgemeine Lösung ist der Form $y_a(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.
wegen Linearität — Integrationskonstanten

(iii) y_1, y_2 sind unabhängig (bilden eine „Basis" bzw. ein „Fundamentalsystem")
$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} \neq 0$$

(Häufig ausgedrückt als: $W(y_1, y_2) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} := y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$.
„Wronski-Determinante")

(iv) Sei $y_1(x)$ eine Lösung der homogenen DG. Die zweite Lösung $y_2(x)$ kann durch Variation der Konstanten (vgl. Seite 29) bestimmt werden.

Beispiel: $$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 .$$

Eine Lösung: $y_1(x) := x$ $\quad [\, y_1' = 1,\ y_1'' = 0 \,]$.

Ansatz: $y_2(x) = C(x)\cdot x$

$$\Rightarrow y_2' = C + xC' \quad ; \quad y_2'' = 2C' + xC''$$

Einsatz in DG

$$\Rightarrow 2C' + xC'' + \cancel{\tfrac{1}{x}}C + C' - \cancel{\tfrac{1}{x}}C = 0$$

$$C'' = -\frac{3}{x}C'$$

Sei $z = C'$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -3\frac{dx}{x} \Leftrightarrow d\ln|z| = -3\, d\ln|x|$$

$$z = \frac{1}{x^3} \quad \text{(spezielle Lösung reicht)}$$

Integriere C:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{x^3} \Rightarrow C = -\frac{1}{2x^2}$$

Zurück zur y_2:

$$y_2 = C(x)\cdot x = \frac{\text{const.}}{x}$$

Überprüfe Unabhängigkeit:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{const}}{x^2}\right) \neq 0$$

Allgemeine Lösung: $$y_a(x) = C_1\cdot x + \frac{C_2}{x}$$

(v) Seien $y_1(x), y_2(x)$ unabhängige Lösungen der linearen DG. Eine spezielle Lösung der inhomogenen DG kann wieder durch Variation der Konstanten gefunden werden.

Beweis (Skizze): Ansatz $y_s(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x)$ (zwei Funktionen!)

$$\Rightarrow y_s' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'$$

Wähle jetzt: $$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \quad \forall x \quad (*)$$
(eine frei Funktion bleibt übrig)

$$\Rightarrow y_s'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'$$

Einsatz in DG: $y_s'' + py_s' + qy_s = f$.

Benutze $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 = y_2'' + py_2' + qy_2$

$$\Rightarrow C_1'y_1' + C_2'y_2' = f \quad \forall x \quad (**)$$

$$y_1'(*) - y_1(**) \Rightarrow C_2' = \frac{-y_1 f}{y_1'y_2 - y_2'y_1}$$

$\neq 0!$ (vgl. (iii)) $\neq 0!$

$$y_2'(*) - y_2(**) \Rightarrow C_1' = \frac{-y_2 f}{y_1y_2' - y_2y_1'}$$

Von hier können C_1, C_2 integriert werden.

— o —

Lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Um weiter zu kommen vereinfachen wir die Problemstellung, und setzen $p(x), q(x) \to \text{const}$:
$$\boxed{y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = f(x).}$$

In diesem Fall können $y_1(x)$ und $y_2(x)$ explizit ermittelt werden!

Es gibt drei unterschiedliche Fälle :

(i) Nehme Ansatz $y(x) = e^{rx}$. Homogene DG:
$$(r^2 + pr + q)\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} = 0 \iff r^2 + pr + q = 0 \quad \text{„charakteristische Gleichung"}$$

Falls $q < \frac{p^2}{4}$ gilt, gibt es zwei Lösungen: $r = r_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Wir können $\underline{y_1(x) = e^{r_+ x}}$, $\underline{y_2(x) = e^{r_- x}}$ wählen; sind unabhängig,
$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(r_- - r_+)x} = e^{-2x\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$$

(ii) Falls $q = \frac{p^2}{4}$ gilt, ist $\underline{y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}}$ eine Lösung, aber die zweite unabhängige Lösung $y_2(x)$ muß noch gefunden werden.

Variation der Konstanten:
$$y_2(x) = C(x)\,e^{-\frac{p}{2}x}$$
$$y_2'(x) = C'(x)e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}C(x)e^{-\frac{p}{2}x}$$
$$y_2''(x) = C''(x)e^{-\frac{p}{2}x} - pC'(x)e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}C(x)e^{-\frac{p}{2}x}$$

$$\Rightarrow \quad y_2'' + py_2' + \frac{p^2}{4}y_2 = \left[C'' - pC' + \frac{p^2}{4}C + pC' - \frac{p^2}{2}C + \frac{p^2}{4}C\right]e^{-\frac{p}{2}x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad C'' = 0 \quad \Rightarrow \quad C' = \alpha \quad \Rightarrow \quad C = \alpha x + \beta.$$

Nur der Teil mit α bringt etwas Neues $\Rightarrow$ $\underline{y_2(x) = x\,e^{-\frac{p}{2}x}}$.

(iii) Falls $q > \frac{p^2}{4}$ gilt, nehmen wir einen neuen Ansatz:
$$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\cos\left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\,x\right)$$
$$y_2(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\sin\left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\,x\right)$$

Physikalisch: gedämpfte $(p>0)$ oder sich verstärkende $(p<0)$ Schwingungen.

Beweis für y_1 (y_2 ähnlich) :
$$y_1' = -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x}\cos(\ldots) - \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\,e^{-\frac{p}{2}x}\sin(\ldots)$$
$$y_1'' = \frac{p^2}{4}e^{-\frac{p}{2}x}\cos(\ldots) + p\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,e^{-\frac{p}{2}x}\sin(\ldots) + \left(\frac{p^2}{4} - q\right)e^{-\frac{p}{2}x}\cos(\ldots)$$

$$\Rightarrow \quad y_1'' + py_1' + qy_1 = e^{-\frac{p}{2}x}\cos(\ldots)\left[\frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + q\right]$$
$$+ e^{-\frac{p}{2}x}\sin(\ldots)\left[p\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} - p\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right] = 0.$$

Für alle Fälle können also zwei unabhängige Lösungen gefunden werden, wobei die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung jetzt zur Verfügung steht.

Es bleibt übrig, eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen. Im Prinzip geht dies durch Variation der Konstanten, wie auf Seite 32. In der Praxis ist es oft einfacher, eine Lösung durch einen angemessenen Ansatz zu erraten.

„harmonischer Oszillator"

Beispiel (Seite 2):
$$\underbrace{y'' + 2ky'}_{\text{gedämpft (für } k>0)} + \omega_0^2 y = \underbrace{b\sin(\omega x)}_{\text{getrieben}}$$

Seite 33: $q \to \omega_0^2$, $\frac{p}{2} \to k$, $\frac{p^2}{4} \to k^2$

Falls $k^2 < \omega_0^2$, geht es um Fall (iii), d.h.
$$y_a(x) = C_1 e^{-kx} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - k^2}\, x\right) + C_2 e^{-kx} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}\, x\right)$$

Für $y_s(x)$ nehmen wir den Ansatz
$$y_s(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$
$$y_s'(x) = -\omega A \sin(\omega x) + \omega B \cos(\omega x)$$
$$y_s''(x) = -\omega^2 A\cos(\omega x) - \omega^2 B \sin(\omega x)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega x)\left[-\omega^2 A + 2k\omega B + \omega_0^2 A\right] + \sin(\omega x)\left[-\omega^2 B - 2k\omega A + \omega_0^2 B\right] = b\sin(\omega x)$$

$$\Rightarrow B = \frac{(\omega^2-\omega_0^2)A}{2k\omega} \quad ; \quad (\omega_0^2-\omega^2)\cdot B - 2k\omega A = b$$
$$\left[\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{2k\omega} + 2k\omega\right]A = -b$$

$$A = \frac{-2k\omega b}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4k^2\omega^2} \quad ; \quad B = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)b}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4k^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-kx}\left[C_1\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}\,x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}\,x\right)\right] - \frac{b}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4k^2\omega^2}\left[2k\omega\cos(\omega x) + (\omega^2-\omega_0^2)\sin(\omega x)\right]$$

Hinweise für andere inhomogenen Terme:

* f Polynom des Grades n $\Rightarrow$ y_s Polynom des Grades n oder $n+1$

* $f \propto e^{\alpha x}$ $\Rightarrow$ $y_s \propto e^{\alpha x}$, $x e^{\alpha x}$, $x^2 e^{\alpha x}$
  - $e^{\alpha x}$: $\alpha \neq r_\pm$
  - $x e^{\alpha x}$: $\alpha = r_+$ oder $\alpha = r_-$
  - $x^2 e^{\alpha x}$: $\alpha = r_+ = r_-$ $\left(\frac{p^2}{4} = q\right)$

* $f = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ $\Rightarrow$ $y_s = C\cos\omega x + D\sin\omega x$, $x\left(C\cos\omega x + D\sin\omega x\right)$
  - $C\cos\omega x + D\sin\omega x$: $p \neq 0$ oder $\omega^2 \neq q$
  - $x\left(C\cos\omega x + D\sin\omega x\right)$: $p = 0$ und $\omega^2 = q$

* $f = f_1 + f_2$ $\Rightarrow$ $y_s = y_{s1} + y_{s2}$ („Superposition von Teillösungen")
