2.6 Gewöhnliche Differenzialgleichungen [Lang & Pucker 6.1-2]

Auf Seite 19 hatten wir schon eine Differenzialgleichung: die (unbekannte) Stammfunktion $F(x)$ und der (bekannte) Integrand $f(x)$ erfüllen $F'(x) = f(x) \; \forall x$.
Jetzt definieren wir Differenzialgleichungen etwas allgemeiner.
=: DG

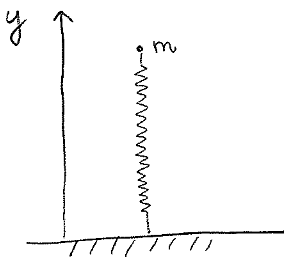
Seite 14: eine Funktion $y(x)$ kann „implizit" durch die Gleichung $G(y,x) = 0$ definiert werden. Die Koordinate x wird auch die „unabhängige Variable" genannt, die Lösung $y(x)$ die „abhängige Variable".

Verallgemeinerung: die Gleichung $G(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0$ definiert eine gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung.

Beispiele:

* In der Gleichung $F'(x) = f(x)$ spielt F die Rolle von y; die neue Schreibweise wäre $G(y', y, x) := y' - f(x) = 0$.

* In der klassischen Mechanik spielt die Zeitkoordinate t die Rolle der unabhängigen Variablen; die Ortskoordinate die der abhängigen Variablen. Die bekannte Newtonsche Bewegungsgleichung ist eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung.



$$\underset{\text{Beschleunigung}}{m\frac{d^2y}{dt^2}} = \underset{\text{Reibungskraft}}{-\gamma\frac{dy}{dt}} \; \underset{\text{Federkraft}}{-ky} \; \underset{\text{Schwerkraft}}{-mg}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \frac{\gamma}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y + g = 0$$

Begriffe:

* gewöhnliche DG: eine unabhängige Variable

↔ partielle DG: mehrere Variablen, z.B. $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y) = 0$.

* lineare DG: Abhängigkeit von y linear, z.B.

$$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{d}{dt} + \frac{k}{m}\right)}_{L \;\; \text{„Differenzialoperator"}} y = -g \;;$$

d.h., $L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L y_1 + \alpha_2 L y_2$.

↔ nichtlineare DG: $\ddot{y} + y\dot{y} + y^3 = 0$

* allgemeine Lösung: enthält unbekannte Integrationskonstanten, wie ein unbestimmtes Integral; normalerweise gilt: Zahl der Konstanten = Ordnung der DG.

↔ spezielle Lösung: keine Unbekannten; wie ein bestimmtes Integral.

* Anfangsbedingungen: brauche so viele wie es Integrationskonstanten gibt, um eine eindeutige Lösung zu wählen. Normalerweise: bestimme bei x_0 die Werte von $\underbrace{y, y', \dots, y^{(n-1)}}_{n \text{ Stück}}$. Dann folgt $y^{(n)}$ von der DG und $y^{(n+1)}, \dots,$ von Ableitungen der DG; die Lösung kann also eindeutig als Taylor-Reihe,

$$y(x) = \exp\left((x-x_0)\frac{d}{dx}\right) y(x_0),$$

geschrieben werden.

↔ Randbedingungen: kenne nicht $y(x_0)$ und $y'(x_0)$ sondern $y(x_{min})$ und $y(x_{max})$; muß $y'(x_0)$ so aussuchen, dass $y(x_{max})$ erreicht wird.

* Definitionsbereich: $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ so dass DG für $y^{(n)}$ gelöst werden kann.

Skizzen für den Fall $n=1$, d.h. $G(y', y, x) = 0$:

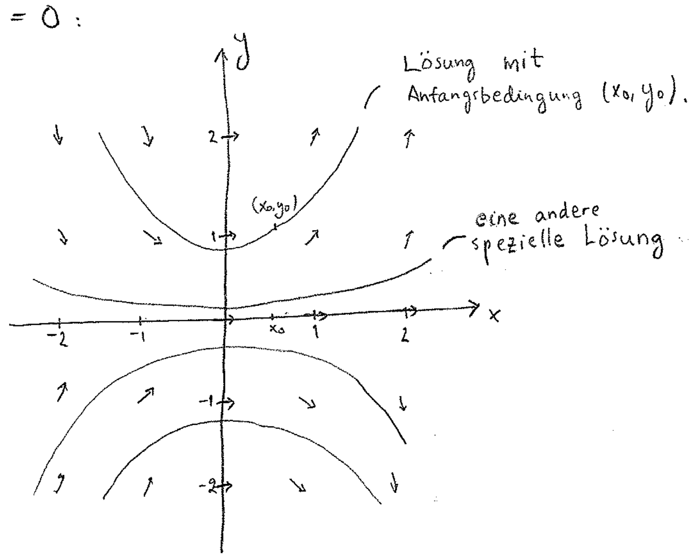
$G(y', y, x) := y' - yx$,

d.h. $y' = yx$

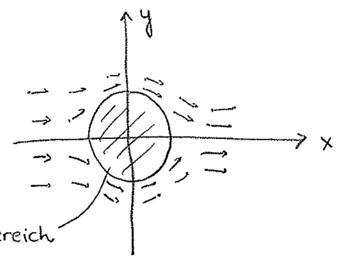
Skizziere y' in (x,y)-Ebene als Tangentensteigung.

(Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Integrationskonstante}}}{C} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$
)



Vielleicht auch möglich:



— ∘ —

Allgemeine Lösung der linearen Differenzialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) + p(x)y(x) + q(x) = 0$$

„inhomogener Term" (homogene DG: $y' + py = 0$.)

Es geht in drei Schritten:

(i) Satz: allgemeine Lösung (der inhomogenen Gleichung)
= allgemeine Lösung der homogenen Gleichung
+ speziell<u></u>e Lösung der inhomogenen Gleichung.

Beweis: Seien y_1 und y_2 zwei unterschiedliche Lösungen:
$y_1' + py_1 + q = 0$, $y_2' + py_2 + q = 0$. Subtrahiere Gleichungen $\Rightarrow (y_1 - y_2)' + p(y_1 - y_2) = 0$.
D.h., Unterschiede bzw. Unbestimmtheiten genügen unbedingt der homogenen Gl. □

(ii) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: (y_a)

$$y_a'(x) = -p(x)\, y_a(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_a(x) = 0 \quad \underline{\text{oder}} \quad \frac{y_a'(x)}{y_a(x)} = \frac{d}{dx} \ln|y_a(x)| = -p(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y_a(x) = 0 \quad \underline{\text{oder}} \quad \ln|y_a(x)| = -\int_{x_0}^{x} dt\, p(t) + \text{const}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_a(x) = 0 \quad \underline{\text{oder}} \quad |y_a(x)| = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t) + \text{const}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_a(x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right)$$

Integrationskonstante $= \pm \exp(\text{const})$; enthält auch die Möglichkeit $y_a(x) = 0$!

(iii) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung: (y_s)

In der Praxis ist es häufig einfach, eine Lösung zu erraten.
Im Prinzip gibt es aber auch eine systematische Methode dafür, durch „Variation der Konstanten".

D.h., nehme Ansatz $y_s(x) = C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right)$

$$\Rightarrow \quad y_s'(x) = C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right) - p(x)\, C(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_s'(x) + p(x)\, y_s(x) = C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right).$$

Die inhomogene Gleichung:

$$C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right) = -q(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dC(x)}{dx} = -q(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right)$$

$$C(x) = -\int_{x_0}^{x} ds\, q(s) \exp\left(\int_{x_0}^{s} dt\, p(t)\right).$$

Fazit: die allgemeine Lösung ist $y(x) = y_a(x) + y_s(x)$; mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ wird $C \to y_0$, und die Lösung kann als

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt\, p(t)\right) \left[y_0 - \int_{x_0}^{x} ds\, q(s) \exp\left(\int_{x_0}^{s} dt\, p(t)\right) \right]$$

geschrieben werden.

Spezielle nichtlineare Differenzialgleichungen erster Ordnung, die auch lösbar sind

* Separierbare DG : $\frac{dy}{dx} = g(y)\, f(x)$.

  Wir lassen die Notation uns geleiten: $\frac{dy}{g(y)} = dx\, f(x) \Rightarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})} = \int_{x_0}^{x} d\tilde{x}\, f(\tilde{x})$.

  Das Ergebnis kann durch Ableitung nach x überprüft werden (vgl. Seite 26): $\frac{d}{dx}\{\,..=..\,\} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{g(y)} = f(x)$ OK!

  Beispiel: $y' = -\frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{y}\right]_{y_0}^{y(x)} = \left[\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x} \Rightarrow \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$

* DG der Bernoulli-Form: $\frac{dy}{dx} = p(x)\,y + q(x)\,y^\alpha$, $\alpha \neq 0,1$

  (Ursprünglich: $x \to t,\ y \to v,\ \alpha \to n,\ p \to -|p|,\ q \to -|q|$: $\dot{v} = -|p|\,v - |q|\,v^n$.
  „schnelle Reibung"
  „langsame Reibung")

  Führe eine neue abhängige Variable ein: $z(x) := (y(x))^{1-\alpha}$; $y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$

  Es gilt: $y'(x) = \frac{1}{1-\alpha}(z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\, z'(x) = \frac{1}{1-\alpha}(z(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, z'(x)$.

  $$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z' = p\, z^{\frac{1}{1-\alpha}} + q\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad \Big|\ \times (1-\alpha)\, z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

  $$z' = (1-\alpha)\,p\,z + (1-\alpha)\,q$$

  Diese ist eine lineare DG, und kann wie auf Seite 29 gelöst werden.

* Exaktes Differenzial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$, wobei $p(x,y)$ als $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ und $q(x,y)$ als $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ erkennbar sind.

  Seite 14 (implizite Differenziation) $\Rightarrow$ $F(x,y) = \text{const.}$!
  Automatisch durch die Notation:

  $$dy \cdot q(x,y) = -\,dx \cdot p(x,y)$$

  $$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF = 0 \Rightarrow F = \text{Const}.$$

  Beispiel: $y' = -\frac{y}{x}$; $F = xy$; $y(x) = \frac{c}{x}$.

* DG vom homogenen Typ: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (d.h. invariant in $y \to cy,\ x \to cx$).

  Führe eine neue unabhängige Variable ein: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

  $$\Rightarrow y(x) = x\,z(x)\,, \quad \frac{dy}{dx} = z(x) + x\,z'(x)$$

  $$\Rightarrow x z' + z = f(z)$$

  $$\Rightarrow z' = \frac{f(z) - z}{x} \qquad \text{separierbar!}$$

  $$\int_{z_0}^{z} \frac{d\tilde{z}}{f(\tilde{z}) - \tilde{z}} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}}$$

  Beispiel: $y' = -\frac{y}{x}$; $f = -z$; $-\frac{1}{2}\left[\ln z\right]_{z_0}^{z} = \left[\ln x\right]_{x_0}^{x}$;

  $z = \frac{c}{x^2}$; $y = \frac{c}{x}$.