2.5 Integrationsmethoden [Lang & Pucker 5.2-3]

Es gibt einige (im Folgenden vier) „Tricks", die das Erraten der Stammfunktion erleichtern können.

(i) Variablentransformation bzw. Substitution der Variablen

Sei φ eine differenzierbare $[\varphi' \exists]$ und invertierbare $[\varphi^{-1} \exists]$ Funktion.

Es gilt:

$$I = \int_a^b dx\ f(x) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} dt\ \varphi'(t)\, f(\varphi(t)) \qquad \left(= \int_{t_a}^{t_b} dt\ \frac{dx}{dt}\, f(x)\,. \right)$$

Beweis: Sei $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, und $\tilde{F}(t) := F(\varphi(t))$.

Dann ist

$$\frac{d\tilde{F}(t)}{dt} \underset{\text{Kettenregel}}{=} F'(\varphi(t))\,\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,,$$

und somit

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} dt\ \varphi'(t)\, f(\varphi(t)) = \Big[\tilde{F}(t)\Big]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = F(b) - F(a)\,. \quad \square$$

Eine kürzere Schreibweise:

$$x = \varphi(t) \qquad\qquad x_{min} = a \Leftrightarrow t_{min} = \varphi^{-1}(a)$$

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt = \varphi'(t)\,dt \qquad\qquad x_{max} = b \Leftrightarrow t_{max} = \varphi^{-1}(b)\,.$$

(In vielen Fällen ist die Form $t = \varphi^{-1}(x)$ zuerst erkennbar!)

Beispiele:

* $$\int_a^b dx\,(1+cx)^4 \underset{\substack{t=cx\\ x=\frac{t}{c}\\ dx=\frac{dt}{c}}}{=} \int_{ca}^{cb} \frac{dt}{c}\,(1+t)^4 = \frac{1}{c}\int_{1+ca}^{1+cb} ds\ s^4 = \frac{1}{5c}\left[(1+cb)^5 - (1+ca)^5\right]$$

„Skalierung" $\qquad s = 1+t,\ t = s-1,\ dt = ds$ „Verschiebung"

* $$\int_a^b \frac{dy}{\sqrt{1+y}} \underset{\substack{t=\sqrt{1+y}\\ y=t^2-1\\ dy=2t\,dt}}{=} \int_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} \frac{2t\,dt}{t} = 2\,[t]_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} = 2\left[\sqrt{1+b} - \sqrt{1+a}\right]$$

„$t = \varphi^{-1}(y)$"
„$y = \varphi(t)$"
„$dy = \varphi'(t)\,dt$"

* Bei trigonometrischen Integranden hilft häufig:

$$t = \tan\frac{x}{2}\ ;\quad x = 2\arctan(t)\ ;\quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Seite 10

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\Rightarrow \int^x \frac{dy}{\sin y} \underset{t=\tan\frac{y}{2}}{=} \int^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{2\,dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t} = \int^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{dt}{t} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

(ii) Partielle Integration

Sei der Integrand ein Produkt zweier Funktionen, und sei eine davon direkt als Ableitung erkennbar : $f(x) = u(x)\,v'(x)$. Dann gilt:

$$\int^x dy\, u(y)\,v'(y) = u(x)\,v(x) - \int^x dy\, u'(y)\,v(y).$$

Beweis:
$$\int^x dy\, \left[u(y)v'(y) + u'(y)v(y)\right] \underset{\text{Produktregel}}{=} \int^x dy\, \frac{d}{dy}\left[u(y)v(y)\right] = u(x)\,v(x) \qquad \square$$

$\int^x dy\, f(y) = F(x)$ wobei $F'(x) = f(x)$,

d.h. $\int^x dy\, F'(y) = \int^x dy\, \frac{dF}{dy} = F(x)$.

In der Praxis: man muß lernen, angemessene u, v zu identifizieren.

Beispiele:

* $$\int^x dy\, \ln y \underset{u=\ln y,\ v=y}{=} x\ln x - \int^x dy\, \underbrace{y}_{v}\, \underbrace{\frac{d\ln y}{dy}}_{u'} = x\ln x - \int^x dy = x\ln x - x$$

* $$\int^x dy\, \sqrt{1+y^2} \underset{u=\sqrt{1+y^2},\ v=y}{=} x\sqrt{1+x^2} - \int^x dy\, y\, \frac{d}{dy}\sqrt{1+y^2} = x\sqrt{1+x^2} - \int^x dy\, \frac{y^2+1-1}{\sqrt{1+y^2}}$$
$$= x\sqrt{1+x^2} + \int^x dy\, \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \int^x dy\, \sqrt{1+y^2}$$
Aufgabe 6.1
$$\Rightarrow \int^x dy\, \sqrt{1+y^2} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)$$

* $$\int_a^b dt\, \sin^2(t) \underset{u=\sin(t),\ v=-\cos(t)}{=} \left[-\sin(t)\cos(t)\right]_a^b + \int_a^b dt\, \underbrace{\cos(t)}_{-v}\, \underbrace{\cos(t)}_{u'}$$
$$\underset{\cos^2+\sin^2=1}{=} \left[-\sin(t)\cos(t)\right]_a^b + \left[t\right]_a^b - \int_a^b dt\, \sin^2(t)$$
$$\Rightarrow \int_a^b dt\, \sin^2(t) = \frac{1}{2}\left[t - \sin(t)\cos(t)\right]_a^b$$

* $$I_n := \int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax} \underset{u=x^n,\ v=-\frac{e^{-ax}}{a}}{=} -\frac{1}{a}\left[x^n e^{-ax}\right]_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty dx\, n x^{n-1} e^{-ax}$$

Für $a>0$ ist $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-ax} = 0$;
für $n>0$ ist $\lim_{x\to 0} x^n e^{-ax} = 0$.

$$\Rightarrow I_n = \frac{n}{a} I_{n-1}.$$

Außerdem gilt : $I_0 = \int_0^\infty dx\, e^{-ax} = -\frac{1}{a}\left[e^{-ax}\right]_0^\infty = \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n}{a} I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} = \frac{n!}{a^n} I_0 = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

— o —

(iii) Partialbruchzerlegung.

Sei der Integrand der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei P und Q Polynome sind. Falls Grad(P) $\geq$ Grad(Q) ist, kann ein Teil von $P(x)$ „wegdividiert" werden, so dass ein Integrand mit Grad(P) $<$ Grad(Q) übrig bleibt (Beispiel folgt):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\underbrace{(x-a)(x-b)^n \dots}_{\text{reelle Nullstellen}} \; \underbrace{(x^2+px+q)(x^2+rx+s)^m \dots}_{\text{keine reellen Nullstellen}^{\dagger}}}$$

Die Prozedur:

* $m > 1$ oder $n > 1$ $\Rightarrow$ Seite 26
* andernfalls: $\frac{P(x)}{(x-a)\dots(x^2+px+q)\dots} = \frac{A}{x-a} + \dots + \frac{Bx+C}{x^2+px+q} + \dots$
* $\frac{A}{x-a} = A \frac{d}{dx} \ln|x-a|$
* $\frac{Bx+C}{x^2+px+q} = \frac{B}{2} \cdot \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \cdot \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}$

$$= \frac{B}{2}\frac{d}{dx}\ln|x^2+px+q| + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{\underbrace{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}_{\text{muß positiv sein!}}}\frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)$$

Beispiele:

* $$\int^x dy \frac{1}{y^2-a^2} = \int^x dy \frac{1}{(y-a)(y+a)} = \int^x dy \left(\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y+a}\right)\cdot\frac{1}{2a}$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| .$$

* $$\int^x dy \frac{y}{y^2-a^2} = \int^x dy \frac{y}{(y-a)(y+a)} = \int^x dy \left(\frac{1}{y-a} + \frac{1}{y+a}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x-a| + \ln|x+a|\right) = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2|$$

* $$\int^x dy \frac{y^2}{y^2-a^2} = \int^x dy \frac{y^2-a^2+a^2}{y^2-a^2} = x + \frac{a}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| .$$

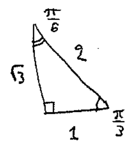
* $$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = ?$$ $\qquad q - \frac{p^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$ keine reellen Nullstellen.

Schreibe $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$
$$= \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(x+\tfrac{1}{2})^2 + 1\right]$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2} \qquad \Big| \; t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\tfrac{1}{2}) ; \; x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2} ; \; dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right)$$



---

† Falls komplexe Zahlen erlaubt sind, können Nullstellen immer gefunden werden, und alles wird einfacher!

(iv) Ableitung nach Parameter

Seite 20: $\quad \frac{d}{dx} \int_a^x dy\, f(y) = f(x) \; ; \quad \frac{d}{dx} \int_x^b dy\, f(y) = -f(x)$.

Sei jetzt $\quad I(a(x), b(x), x) := \int_{a(x)}^{b(x)} dy\, f(y,x)$.

Wie bei impliziter Differenziation (Seite 14):

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\partial I}{\partial a}\frac{da}{dx} + \frac{\partial I}{\partial b}\frac{db}{dx} + \frac{\partial I}{\partial x}$$

$$= -a'(x)\, f(a(x),x) + b'(x)\, f(b(x),x) + \int_{a(x)}^{b(x)} dy\, \frac{\partial f(y,x)}{\partial x} .$$

Falls a und b unabhängig von x sind, gibt nur der letzte Term einen Beitrag.

Beispiele:

$*\quad \int^x \frac{dy}{(y-a)^n} \overset{n>1}{\underset{+}{=}} \frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial a} \int^x \frac{dy}{(y-a)^{n-1}} = \ldots = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \int^x \frac{dy}{y-a}$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \ln|x-a| = \frac{1}{(n-1)!}(-1)\frac{(n-2)!}{(x-a)^{n-1}} = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

$*\quad \int^x dy \frac{By+C}{(y^2+py+q)^n} = \frac{1}{1-n}\frac{\partial}{\partial q} \int^x dy \frac{By+C}{(y^2+py+q)^{n-1}} = \ldots = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial q^{n-1}} \int^x dy \frac{By+C}{y^2+py+q}$

$*\quad I_n = \int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \int_0^\infty dx\, e^{-ax} \overset{\text{Seite 24}}{=} (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \cdot \frac{1}{a}$

$$= \frac{n!}{a^{n+1}} .$$

$*\quad \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \, ?$

Sei $\quad F(a) := \int_0^\infty dx\, e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$

$\Rightarrow \quad F'(a) = -\int_0^\infty dx\, e^{-ax}\sin x \underset{\substack{u=e^{-ax}\\ v=\cos x}}{=} \left[e^{-ax}\cos x\right]_0^\infty + a\int_0^\infty dx\, e^{-ax}\cos x$

$$\underset{\substack{u=e^{-ax}\\ v=\sin x}}{=} \left[e^{-ax}\cos x\right]_0^\infty + \left[a e^{-ax}\sin x\right]_0^\infty + a^2 \int_0^\infty dx\, e^{-ax}\sin x$$

$\Leftrightarrow \quad F'(a) = -1 - a^2 F'(a) \quad \Rightarrow \quad F'(a) = -\frac{1}{1+a^2}$

$\Rightarrow \quad F(a) = -\arctan(a) + \text{const}.$

Außerdem gilt: $\quad 0 = \lim_{a\to\infty} F(a) = -\lim_{a\to\infty}\arctan(a) + \text{const}$

$$= -\frac{\pi}{2} + \text{const} \Rightarrow \text{const} = \frac{\pi}{2} .$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = F(0) = \underbrace{-\arctan(0)}_{\text{Seite 17: } 0} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} .$$

$^+$ Natürlich könnte man hier den Integrand auch direkt als $\frac{1}{(y-a)^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{d}{dy}\frac{1}{(y-a)^{n-1}}$ erkennen.