2.4 Integralrechnung [Lang & Pucker 5.1]

Integration ist die „Umkehroperation" zu Differenziation, d.h.
integriere (differenziere ($f(x)$)) = differenziere (integriere ($f(x)$)) = $f(x)$. Genauer:

Definition: Sei $f(x)$ stetig $\forall x \in \,]a,b[$. Die Stammfunktion bzw. das unbestimmte Integral von $f(x)$ ist eine stetige und differenzierbare Funktion $F(x)$, die die „Differenzialgleichung"

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in \,]a,b[$$

erfüllt.

Notation:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{„} dF = dx\, f(x) \text{"}$$

„unbestimmtes Integral"

$$\Rightarrow \quad F(x) = \int dF = \int dx\, f(x) .$$

Später wird besser sein: $F(x) = \int^{x} dy\, f(y)$. „bestimmtes Integral"

Hier wird $f(y)$ der „Integrand" genannt.

Bemerkung: Die Stammfunktion ist nicht eindeutig:

$$F'(x) = f(x) \quad \& \quad G'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[F(x) - G(x)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) - G(x) = \text{const}.$$

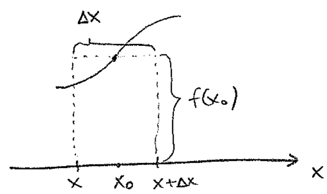
„Integrationskonstante"

Wichtig: Man darf $F(x)$ erraten!
Man muß aber Ergebnis durch Ableitung $\frac{dF}{dx}$ überprüfen!

Interpretation: Laut Mittelwertsatz gilt $\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x_0) = f(x_0)$, $x < x_0 < x + \Delta x$

D.h. $F(x+\Delta x) = F(x) + f(x_0)\,\Delta x$.

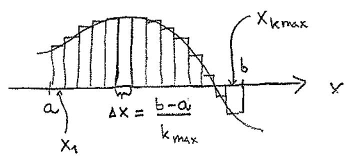
Hier ist $f(x_0)\,\Delta x$ = „Flächenelement",
und somit $F(x)$ = „Fläche unter f bis x".



Definition: Das bestimmte Integral von $f(x)$ zwischen a und b wird als

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{k_{max}} f(x_k)\,\Delta x$$

definiert (falls Limes existiert, unabhängig von Wahl von x_k.)



I + D ⇒ **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:**

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) .$$

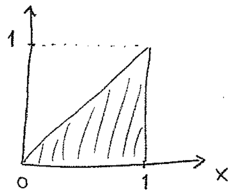
bestimmtes Integral — unbestimmtes Integral.

Beispiel:

$$f(x) = x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \text{const.}$$

$$\int_0^1 dx\; x = F(1) - F(0) =: \left[\frac{x^2}{2} + \text{const}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$



Sätze:

* $$\int_a^b dx\,(cf(x)) = c\int_a^b dx\, f(x)$$ [wie auf Seite 9: $(cF)' = cF'$]

  $$\int_a^b dx\,[f(x)+g(x)] = \int_a^b dx\, f(x) + \int_a^b dx\, g(x)$$ [wie auf Seite 9: $(F+G)' = F'+G'$]

* $$\int_a^b dx\, f(x) = -\int_b^a dx\, f(x)$$ [$F(b) - F(a) = -(F(a)-F(b))$]

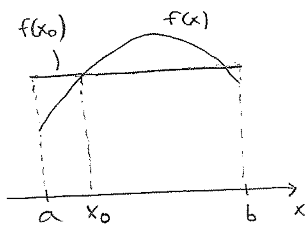
  $$\int_a^a dx\, f(x) = 0$$ [$F(a) - F(a) = 0$]

  $$\int_a^b dx\, f(x) + \int_b^c dx\, f(x) = \int_a^c dx\, f(x)$$ [$F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$]

  Gilt auch für $a < c < b$ usw!

* Sei $m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in [a,b]$.
  Dann gilt
  $$m(b-a) \leq \int_a^b dx\, f(x) \leq M(b-a)$$
  [Aus der Definition: $\displaystyle\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{k_{max}} f(x_k)\Delta x \geq \lim_{\Delta x \to 0}\{m\cdot \underbrace{k_{max}\cdot\Delta x}_{b-a}\}$]

* Mittelwertsatz der Integralrechnung:
  Sei $f(x)$ stetig $\forall\, x \in\,]a,b[$. Dann $\exists\, x_0 \in\,]a,b[$ so dass
  $$\int_a^b dx\, f(x) = f(x_0)(b-a)$$
  gilt.



[Benutze Mittelwertsatz der Differenzialrechnung auf Stammfunktion:
$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = F'(x_0)(b-a) = f(x_0)(b-a) \quad \square.$$]

* $$\frac{d}{dx}\int_a^x dy\, f(y) = f(x)$$ [$\frac{d}{dx}(F(x) - F(a)) = F'(x) = f(x)$]

  $$\frac{d}{dx}\int_x^b dy\, f(y) = -f(x)$$ [$\frac{d}{dx}(F(b) - F(x)) = -F'(x) = -f(x)$]

———— ∘ ————

Ergebnisse: Für das praktische Erraten der unbestimmten Integrale kann man die Ableitungstabelle auf Seite 10 benutzen, aber jetzt in die umgekehrte Richtung!

$$\int^x dy \cdot 0 = 0 \qquad \int^x dy \cosh y = \sinh x \qquad \int^x dy \cos y = \sin x$$

$$\int^x dy\, e^y = e^x \qquad \int^x dy \sinh y = \cosh x \qquad \int^x dy \sin y = -\cos x$$

$$\int^x \frac{dy}{y} = \ln|x| \qquad \int^x dy \frac{1}{\cosh^2 y} = \tanh x \qquad \int^x dy \frac{1}{\cos^2 y} = \tan x$$

$$\int^x dy\, y^\mu = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} \qquad \int^x dy \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} = \operatorname{arsinh} x \qquad \int^x dy \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin x$$

$$\int^x dy\, f'(y) e^{f(y)} = e^{f(x)} \qquad \int^x dy \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} = \operatorname{arcosh} x \qquad \text{—"—} = -\arccos x$$

$$\int^x dy \frac{f'(y)}{f(y)} = \ln|f(x)| \qquad \int^x dy \frac{1}{1-y^2} = \operatorname{artanh} x \qquad \int^x dy \frac{1}{1+y^2} = \arctan x$$

Wegen der unbestimmten Integrationskonstanten gibt es in manchen Fällen mehrere mögliche Schreibweisen; zum Beispiel,

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \Rightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

nicht sichtbar im $\int^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

Es gilt auch:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{artanh}\frac{1}{x} = \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \int^x dy \frac{1}{1-y^2} = \operatorname{artanh} x = \operatorname{artanh}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Bemerkung: Ableitungen von elementaren Funktionen sind immer elementare Funktionen. Deren Integrale sind aber nicht immer elementare Funktionen; falls ein solches Integral häufig vorkommt, gibt man es einen Namen und erkennt es nachher als „spezielle Funktion". Zum Beispiel:

$$\mathrm{Li}_2(x) := -\int_0^x \frac{dy}{y} \ln(1-y), \quad 0<x<1 \qquad \text{„Dilogarithmus"}$$

$$E_1(x) := \int_x^\infty \frac{dy}{y} e^{-y}, \quad x>0 \qquad \text{„exponentielles Integral"}$$

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty dy\, y^{x-1} e^{-y}, \quad x>0 \qquad \text{„Gammafunktion"}$$

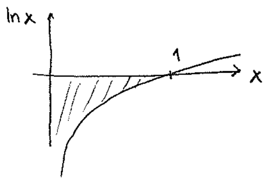
$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy\, e^{-y^2}, \quad x>0 \qquad \text{„Error funktion"}$$

Erweiterung 1: uneigentliches Integral

Falls der Integrand $f(x)$ bei $x \to a$ bzw. $x \to b$ divergiert, oder a bzw. b nach $\pm\infty$ geschickt wird, oder beides, wird das Integral als Grenzwert definiert, falls dieser existiert. Falls ja, wird die Funktion $f(x)$ auf $]a,b[$ integrierbar genannt. Durch Grenzwert definierte Integrale sind „uneigentliche Integrale".

Beispiele:

* $$\int_0^1 dx \, \ln x$$



$$:= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 dx \, \ln x$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 dx \, \frac{d}{dx}\left[x \ln x - x\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[x \ln x - x\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[\underbrace{1 \ln 1}_{0} - 1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon\Big] = -1 .$$

Seite 13: $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$

* $$\int_0^\infty dx \, e^{-x}$$

$$:= \lim_{\delta \to \infty} \int_0^\delta dx \, e^{-x}$$

$$= \lim_{\delta \to \infty} \int_0^\delta dx \, \frac{d}{dx}\left[-e^{-x}\right] = \lim_{\delta \to \infty} \left[-e^{-x}\right]_0^\delta = \lim_{\delta \to \infty} \left[-e^{-\delta} + 1\right] = 1$$

Erweiterung 2: bestimmtes Integral in der Mathematik

Für uns war $f(x)$ stetig (und $F(x)$ differenzierbar), aber man kann den Begriff des bestimmten Integrals so verallgemeinern, dass Stetigkeit nicht mehr nötig ist.

Damit verbundene Begriffe: Lebesgue-Integral, Riemann-Integral, Maßtheorie, das Integrationsmaß, ...

Das Integral könnte so aussehen: $I = \int_\Omega d\mu \, f$

Integrand
Integrationsmaß
Integrationsbereich

Allgemeine Eigenschaften:

$$\int_\Omega d\mu \, (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\Omega d\mu \, f + \beta \int_\Omega d\mu \, g$$

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} d\mu = \int_{\Omega_1} d\mu + \int_{\Omega_2} d\mu \quad \text{falls} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset .$$

Häufig auch: $\int_\Omega d\mu = 1$.

Beispiele:

* $\Omega = [a,b]$; $d\mu := \frac{dx}{b-a}$
* $\Omega =]-\infty, \infty[$; $d\mu :\stackrel{!}{=} dx \, \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$