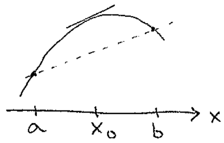
2.3 Taylor - Entwicklung, Reihen [Lang & Pucker, 1.2 - 1.3]

[Brook Taylor 1685 - 1731]

Mittelwertsatz (Seite 11):
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$



$$\Leftrightarrow \quad f(b) = \underbrace{f(a) + f'(x_0)(b-a)}$$

„Vorhersage" für $f(b)$ mittels Informationen bei $x<b$. Allerdings ist $f(a)+f'(x_0)(x-a)$ eine gute Näherung nur für $x=a$ und $x=b$. Kann man die Übereinstimmung mit $f(x)$ verbessern?

Taylor - Formel: Sei $f^{(n)}$ ($n \in \{0,1,2,..\}$) stetig $\forall x \in [a,b]$ und differenzierbar (d.h. $f^{(n+1)}\ \exists$) $\forall x \in]a,b[$.

Dann gilt
$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{„Taylor-Polynom"}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{„Lagrangesches Restglied"}},$$

wobei $a < x_0 < x \leq b$ gilt.

(Wenn wir x_0 so wählen, dass $f(b)$ richtig reproduziert wird, dann ist die Beschreibung nicht exakt bei $a<x<b$, aber wahrscheinlich genauer als die oben skizzierte Gerade.)

Beweis:

(verständlicher: Aufgabe 5.1)

$$F(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2 + \ldots$$

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}}_{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$F(x) = f(x)$$
$$F(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

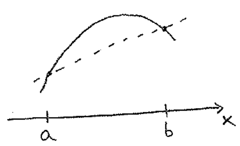
$$G(t) := (x-a)^{n+1} - (x-t)^{n+1}$$
$$G'(t) = (n+1)(x-t)^n$$
$$G(x) = (x-a)^{n+1}$$
$$G(a) = 0$$

Erweiterter Mittelwertsatz (Seite 12):
$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(x_0)}{G'(x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = F(a) + \frac{F'(x_0)}{G'(x_0)}\left[G(x) - G(a)\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!} \cdot \cancel{(x-x_0)^n} \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\cancel{(x-x_0)^n}}$$

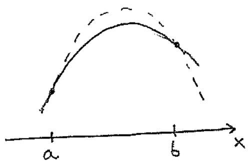
$\square$

Anschaulich:



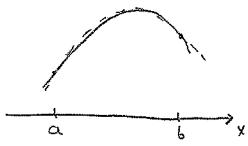
$n=0$

$f(a) + f'(x_0)(x-a)$



$n=1$

$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-a)^2$



$n=2$

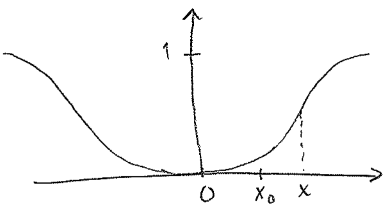
$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x-a)^3$

Unter bestimmten Umständen — falls f ∞-mal differenzierbar ist, die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ für $a < x \leq b$ konvergiert (vgl. Seite 18), und das Restglied $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ für $a < x \leq b$ im Limes $n \to \infty$ verschwindet, können wir $f(x)$, für $\forall x \in [a,b]$, als eine Taylor-Reihe darstellen.

Notation:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} \frac{d^k f(a)}{dx^k} \text{ „="} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k}{k!} f(a)$$
$$\text{„="} \exp\left[(x-a)\frac{d}{dx}\right] f(a).$$

(Für $a = 0$ wird Taylor-Reihe auch MacLaurin-Reihe genannt.)
└ 1698-1746

Gleich kommen Beispiele wo dies alles schön funktioniert, aber zuerst ein berühmtes Gegenbeispiel: Taylor-Reihe von $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ um $x = 0$?



$$f(0) = \exp(-\infty) = 0$$
$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right);$$
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{y\to\infty} 2y^3 \exp(-y^2)$$
$$= \lim_{y\to\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0$$
└ wie auf Seite 13 (L'Hospital)

Und auch: $f^{(n)}(0) = 0 \;\; \forall n$.

D.h. die Taylor-Reihe konvergiert, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k = 0$.

Aber das Ergebnis ist nicht richtig, weil R_n bei $n \to \infty$ nicht kleiner wird:

$$f^{(2)} = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right); \quad f^{(3)} = \left(\cdots + \frac{24}{x^5}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right); \quad f^{(n)} = \left(\cdots + \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}x^{n+1} = \left(\cdots + \frac{(n+2)!}{x_0^{n+3}}\right)\exp\left(-\frac{1}{x_0^2}\right) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$= \underbrace{\left(\cdots + (n+2)\Big(\underbrace{\tfrac{x}{x_0}}_{>1}\Big)^{n+1}\right)}_{\text{wächst mit } n.} \frac{1}{x_0^2}\exp\left(-\frac{1}{x_0^2}\right)$$

Satz Falls eine Funktion durch eine konvergente Reihe definiert ist, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, und ihre Taylor-Reihe um den Punkt $x=a$ existiert, dann sind diese zwei Reihen äquivalent.

Beweis: Die Koeffizienten der Taylor-Reihe sind $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Jetzt also:

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots && \Rightarrow f(a) = c_0 \\
f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots && \Rightarrow f^{(1)}(a) = c_1 \\
f^{(2)}(x) &= 2c_2 + 6c_3(x-a) + \dots && \Rightarrow f^{(2)}(a) = 2!\,c_2 \\
f^{(3)}(x) &= 6c_3 + \dots && \Rightarrow f^{(3)}(a) = 3!\,c_3
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad \square$$

Folgerung: Es spielt keine Rolle wie die Reihendarstellung konstruiert wird.

Einige wichtige Reihen:

* e^x, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$: Seite 6
* „geometrische Reihe" $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1$
* $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad -1 \le x < 1$
* „binomische Reihe" $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!} x^3 + \dots, \quad |x| < 1$

Beispiel: Wie kann man die Reihendarstellungen von $\tan(x)$ und $\arctan(x)$ konstruieren?

* zuerst $\arctan(x)$ (leichter!)

Seite 10: $\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$

geometrische Reihe

„integriere" (Kap. 2.4) $\Rightarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

* $\tan(x)$ direkt aus der Definition:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}$$

geometrische Reihe

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots\right]^2 + \dots\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \dots\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2} + \left[\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right] x^4 + \dots\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \dots$$

Jakob Bernoulli 1655–1705

„Bernoulli-Zahl"

Ein anderer Weg: Aufgabe 5.4.

(Die allgemeine Antwort: $\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k} (2^{2k}-1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$)

Allgemeines über Reihen

Reihen sind sehr wichtig in vielen Bereichen der Physik und Mathematik; leider ist ihre Konvergenz ein leidiges Thema, und es gibt keine elegante allgemeine Theorie dazu.

In der Praxis funktioniert aber meistens das „Quotientenkriterium".

Sei

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k$$

und

$$g_k(x) = \left| \frac{c_{k+1}(x-x_0)}{c_k} \right| = \left| \frac{c_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{c_k (x-x_0)^k} \right| .$$

Die Reihe konvergiert, falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert. Sei $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ [falls existiert].

Dann gilt:

$$\begin{cases} g(x) < 1 \Rightarrow \text{die Reihe ist absolut konvergent} \\ g(x) = 1 \Rightarrow \text{keine Aussage möglich} \\ \quad\quad\quad\quad\quad \text{(kann konvergieren falls z.B. alternierend)} \\ g(x) > 1 \Rightarrow \text{die Reihe divergiert} \end{cases}$$

Die Werte von x mit $g(x) < 1$ bilden den Konvergenzbereich.

Beweis für Konvergenz:

Falls $g(x) < 1$ dann $\exists\, k_0$ so dass $g_k(x) < z < 1 \;\forall\, k > k_0$.

Dann gilt: $$f_n(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0} c_k (x-x_0)^k}_{\text{endlich}} + \underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{n} c_k (x-x_0)^k}$$

$$\left| \sum_{k=k_0+1}^{n} c_k (x-x_0)^k \right| \le \sum_{k=k_0+1}^{n} \left| c_k (x-x_0)^k \right|$$

Hier ist $\left| \frac{c_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{c_k (x-x_0)^k} \right| = g_k(x) < z$.

D.h., $$\sum_{k=k_0+1}^{n} \left| c_k (x-x_0)^k \right| < \left| c_{k_0} (x-x_0)^{k_0} \right| \left(z + z^2 + z^3 + \ldots \right) .$$

Hier steht aber die geometrische Reihe, und diese konvergiert für $z<1$.

$\square$

Mit absolut konvergenten Reihen kann man in der Regel genau so umgehen wie mit Polynomen, d.h. Reihe umordnen, zwei Reihen dividieren / multiplizieren, Ordnung von Ableitung und Summierung vertauschen $\left(\frac{d}{dx} \sum_k c_k (x-x_0)^k = \sum_k c_k \cdot k\, (x-x_0)^{k-1} \right)$, Ordnung von Integration und Summierung vertauschen, usw.

— o —