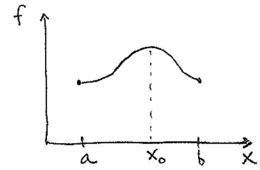
2.2 Differenzialrechnung [Lang & Pucker 4.2, 4.3]

Differenzierbare Funktionen besitzen viele interessante Eigenschaften, wodurch deren Verhalten „nicht-lokal" beschränkt werden kann.

Satz von Rolle [Michel Rolle 1652-1719]

Sei f stetig für $x \in [a,b]$, differenzierbar für $x \in \,]a,b[$, und erfülle außerdem die Gleichung $f(a) = f(b)$. Dann existiert $x_0 \in \,]a,b[$ so dass $f'(x_0) = 0$ gilt.

Idee des Beweises:



* $f(x) = \text{const} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \;\forall x_0$
* $f(x)$ ist nicht konstant. Dann existiert mindestens ein Maximum oder Minimum [Satz von Weierstraß], sei dies bei x_0. Hier gilt $f'(x_0) = 0$!

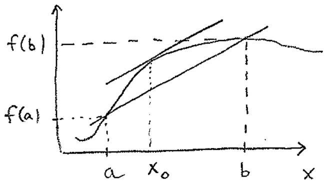
Warum? Beweis durch Widerspruch: Sei $f'(x_0) \neq 0$.

Dann gilt $f(x_0+\varepsilon) = f(x_0) + \underbrace{\underbrace{f'(x_0)}_{\neq 0}\varepsilon}_{\gtrless 0,\ \text{abhängig vom Vorzeichen von } \varepsilon.\ \lightning} + \underbrace{\varepsilon\, \mathcal{O}(\varepsilon)}_{\text{klein}}$.

Mittelwertsatz

Sei f stetig für $x \in [a,b]$ und differenzierbar für $x \in \,]a,b[$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in \,]a,b[$ so dass $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$ gilt,



bzw. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Steigung — Tangentensteigung (bzw. „Sekantensteigung")

Beweis: Benutze Rolle auf $\varphi(x) := f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$:

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

$$\Rightarrow \exists\, x_0 \text{ mit } \varphi'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Bemerkung:

* Definition der Ableitung, mit $b-a =: \Delta x$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \underbrace{f'(a)}_{\text{bekannt!}} + \underbrace{\mathcal{O}(b-a)}_{\text{unbekannt!}}$
* Jetzt: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{unbekannt!}} + \underbrace{0}_{\text{keine Korrektur!}}$.

Folge 1: f sei differenzierbar und <u>monoton wachsend</u> auf $]a,b[$
$\Longleftrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$.

Beweis: mit Hilfe des Mittelwertsatzes (monoton fallend entsprechend)

(**Folge 2:** Es gebe eine „Unsicherheit" in der Lagebestimmung des Messgeräts, d.h. in der Koordinate; sei diese Δx. Dieses führt zu einem „systematischen Fehler" im Messwert: $\Delta f = f'(x_0)\,\Delta x$.)

Erweiterter Mittelwertsatz

[Augustin Louis Cauchy 1789-1857]

Seien f und g zwei Funktionen wie oben (stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf $]a,b[$). Dann existiert mindestens ein $x_0 \in]a,b[$ so dass

$$f'(x_0)\left[g(b)-g(a)\right] = g'(x_0)\left[f(b)-f(a)\right]$$

gilt. Ist weiterhin $g'(x) \neq 0$ auf $]a,b[$, so ist insbesondere $g'(x_0) \neq 0$ und $g(b) \neq g(a)$, und wir erhalten

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \; .$$

Beweis: Benutze Rolle auf $\xi(x) := g(x)\left[f(b)-f(a)\right] - f(x)\left[g(b)-g(a)\right]$:

$$\begin{aligned}
\xi(b) &= g(b)\left[\cancel{f(b)} - f(a)\right] - f(b)\left[\cancel{g(b)} - g(a)\right] \\
&= -g(b)f(a) + g(a)f(b) \\
\xi(a) &= g(a)\left[f(b) - \cancel{f(a)}\right] - f(a)\left[g(b) - \cancel{g(a)}\right] \\
&= g(a)f(b) - g(b)f(a) = \xi(b)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \xi'(x_0) = g'(x_0)\left[f(b)-f(a)\right] - f'(x_0)\left[g(b)-g(a)\right] = 0 \; .$$

Regel von l'Hospital

[Marquis de l'Hospital 1661-1704]

Seien $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, und f und g differenzierbar in einer Umgebung von a. Dann gilt:

$$„\frac{0}{0}" = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \; .$$

Beweis: Laut erweitertem Mittelwertsatz mit $f(a) = g(a) = 0$ gilt:

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \; , \quad \text{mit } a < x_0 < b \, .$$

Schicke jetzt $b \to a^+$, wobei auch $x_0 \to a^+$ automatisch genommen wird.

<u>Anwendungen</u>

* Die Regel von l'Hospital erleichtert in vielen Fällen die Bestimmung eines Grenzwerts.

Beispiele $\left[\text{„}\frac{0}{0}\text{"}\right]$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \qquad (\text{vgl. Seite } 7)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \qquad (\text{Blatt } 3, \text{ Aufgabe } 2(d))$$

* Auch Grenzwerte der Form „$\frac{\infty}{\infty}$" können genommen werden, weil sie als „$\frac{0}{0}$" interpretiert werden können:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{l'Hospital}}}{=} \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Beispiel:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x}_{\text{„}0\cdot\infty\text{"}} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}}}_{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^n}{n} = 0$$

„Logarithmus wächst bei $x=0$ langsamer als jede Potenz."

* Funktioniert auch mit $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0. \qquad (*)$$

„Exponentialfunktion wächst bei $x\to\infty$ schneller als jede Potenz."

* Falls $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ immer noch der Form „$\frac{0}{0}$" bzw. „$\frac{\infty}{\infty}$" ist, kann die Regel von l'Hospital erneut benutzt werden.

Beispiel: $(*)$.

Weitere Begriffe der Differentialrechnung

* Falls eine Funktion, $y(x)$, als Lösung der Gleichung $F(x,y) = \text{const}$ definiert wird, nennt man sie eine „implizite Funktion". Die explizite Lösung $y(x)$ ist eine „explizite Funktion".

$\Rightarrow$ Wie nimmt man $\frac{dy}{dx}$ ohne die explizite Funktion zu kennen?

* Ableitung nach Parameter: die „Koordinate", z.B. x, wird festgehalten, aber ein Parameter, z.B. eine Eigenschaft des Messgeräts, wird geändert:

$$f(x) = ax^2 \qquad \frac{df(x)}{dx} = 2ax \quad \text{(normale Ableitung)}$$

$$\frac{df}{da} = x^2 \quad \text{(Ableitung nach Parameter)}$$

* Partielle Ableitung:

wie Ableitung nach Parameter aber „symmetrischer": beide Variablen werden als „Koordinaten" betrachtet.

Notation:
$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial x} := \left.\frac{df}{dx}\right|_{a = \text{const}}$$

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} := \left.\frac{df}{da}\right|_{x = \text{const}}.$$

Beispiel: $f(x) = ax^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2ax, \; \frac{\partial f}{\partial a} = x^2$.

* Implizite Differenziation:

$$\Delta F = F(x_0+\Delta x, y(x_0+\Delta x)) - F(x_0, y(x_0)) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \underbrace{\frac{F(x_0+\Delta x, y(x_0+\Delta x)) - F(x_0, y(x_0+\Delta x))}{\Delta x}}_{\to \frac{\partial F}{\partial x}} + \underbrace{\frac{F(x_0, y(x_0+\Delta x)) - F(x_0, y(x_0))}{\Delta x}}_{\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

Im Limes $\Delta x \to 0$:

[Kettenregel bzgl. y!]

D.h. $0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$$

Beispiel: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow y'(x) = -\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\frac{2}{3}y^{-1/3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$.

* Höhere Ableitungen:

$$(f')' =: f'' =: f^{(2)}$$

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$$