2. Analysis in einer Dimension

2.1 Grenzwert, Stetigkeit, Differenzierbarkeit [Lang & Pucker 4.1]

Die in der Physik auftauchenden Funktionen sind normalerweise „glatt", d.h. ihre Werte können sich nicht beliebig wild verändern, auf jeden Fall nicht bei kurzen Abständen. Diese Tatsache stellt uns neue Methoden zur Verfügung.

Definition: $f(x)$ hat bei $x = x_0$ den Grenzwert f_0

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \quad |f(x) - f_0| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon .$$

Bezeichnung: „$f(x) \to f_0$ für $x \to x_0$", oder „$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f_0$."

Der Grenzwert kann auch von links oder rechts genommen werden, z.B. „$f(x) \to f_0$ für $x \to x_0^+$" oder „$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f_0$" bedeutet, dass nur $0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon$ betrachtet werden.

Für unendlich: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = f_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \;\; |f(x) - f_0| < \varepsilon \;\; \text{falls} \;\; x > \delta_\varepsilon .$

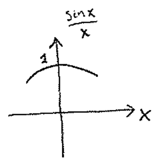
Beispiel:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad „\frac{0}{0}"$$

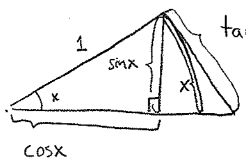
* intuitiv, aus Definition (Seite 6):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 \underbrace{- \frac{x^2}{6} + \dots}_{\to 0 \text{ für } x \to 0^+}$$



* geometrisch:



$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 - \frac{\sin x}{x}}_{>0} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \frac{x^2}{4}$$

D.h.

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad x < \underbrace{\sqrt{2\varepsilon}}_{\delta_\varepsilon} .$$

Sätze (ohne Beweis):

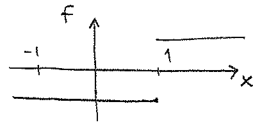
* $\lim\limits_{x \to x_0} c f(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)] \cdot [\lim\limits_{x \to x_0} g(x)]$
* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Definitionen:

* $f(x)$ ist stetig bei $x = x_0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
* $f(x)$ ist stetig im Intervall $]x_a, x_b[$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ stetig $\forall\ x \in]x_a, x_b[$

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & x > 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\frac{1}{2}$; $f(1) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ stetig von links bei $x=1$ aber nicht von rechts.

Also ganz einfach: eine Funktion ist stetig, falls sie skizziert werden kann, ohne den Stift zu heben!

Sätze (ohne Beweis):

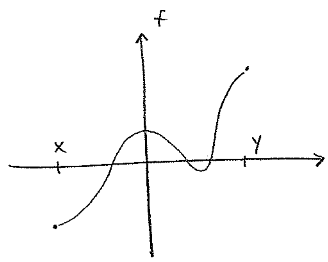
* f, g stetig $\Rightarrow$ $c \cdot f$, $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ stetig [wie oben]
* f, g stetig $\Rightarrow$ Komposition [vgl. Seite 5] $g \circ f$ stetig.
* f stetig $\Rightarrow$ Umkehrfunktion [vgl. Seite 5] f^{-1} stetig.

Zwischenwertsatz (ohne Beweis):

Ist f stetig im Intervall I und sind $x, y \in I$, dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an.

Wichtiger Spezialfall:

Gilt $f(x) < 0$ und $f(y) > 0$, so hat f zwischen x und y mindestens eine Nullstelle:



—— ∘ ——

Definition: $f(x)$ hat bei $x = x_0$ die <u>Ableitung</u> f'

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f' . \qquad \text{„}\frac{0}{0}\text{"}$$

Die Funktion f ist dann <u>differenzierbar</u> bei x_0.

Bezeichnungen:

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0).$$

„Differenzquotient" „Differenzialquotient" bzw. „Leibniz-Notation".

In der Physik auch: $\frac{df}{dt} =: \dot{f}$

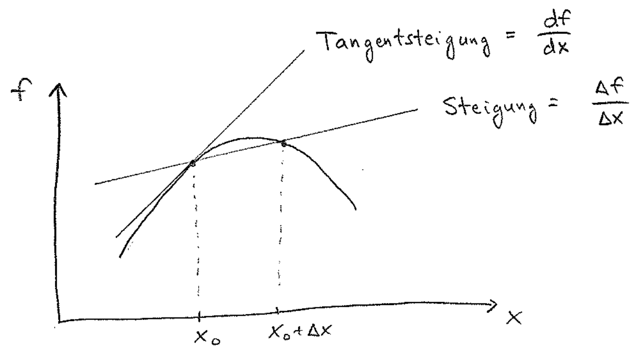
Zeitkoordinate

Konsequenz:

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \Delta x \cdot \mathcal{O}(\Delta x), \quad \text{mit} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \mathcal{O}(\Delta x) = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} |f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| = 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist stetig bei } x_0 \,!$$

Graphisch:



Beispiel: $f(x) = ax^2$

$$\Delta f = a(x_0+\Delta x)^2 - ax_0^2 = 2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2ax_0 + a\Delta x$$

$$\frac{df}{dx} = 2ax_0$$

Die Ableitung kann immer durch die Definition bestimmt werden, aber in der Praxis arbeitet man meistens mit einmal bewiesenen <u>Regeln</u>.

I.

* $(cf)' = cf'$ (weil $\Delta(cf) = c\Delta f$ gilt).
* $(f+g)' = f' + g'$ „Summenregel"
  (weil $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$ gilt).
* $(fg)' = f' \cdot g + g' f$ „Produktregel"
  (weil $\Delta(fg) = f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)$
  $= [f(x_0+\Delta x) - f(x_0)]\,g(x_0+\Delta x) + [g(x_0+\Delta x) - g(x_0)]\,f(x_0)$
  gilt, und g stetig ist).
* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ „Quotientenregel"
  (weil $\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{g(x_0)f(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{g(x_0)g(x_0+\Delta x)}$
  $= \frac{g(x_0)[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x_0) - g(x_0+\Delta x)]}{g(x_0)g(x_0+\Delta x)}$ gilt).

II. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ „Kettenregel"

Beweis: $$\frac{\Delta(g\circ f)}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x}$$

$$= \frac{g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0))}{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{g(y_0+\Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} \cdot \frac{f(x_0+\Delta y) - f(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta y \to 0]{\Delta x \to 0} g'(y_0)\, f'(x_0)$$

Sei $f(x_0) =: y_0$; $f(x_0+\Delta x) =: y_0 + \Delta y$

III. $(f^{-1})'(y) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}$ „Ableitung der Umkehrfunktion"

Beweis: benutze Kettenregel auf der linken Seite von $(f^{-1}\circ f)(x) = x$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Mit diesen Regeln sowie den ursprünglichen Definitionen kann die folgende nützliche Tabelle konstruiert werden:

$\frac{dc}{dx} = 0$	$\frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x$	$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$
$\frac{de^x}{dx} = e^x$	$\frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x$	$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$
$\frac{d\ln\lvert x\rvert}{dx} = \frac{1}{x}$	$\frac{d\tanh x}{dx} = 1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\frac{d\tan x}{dx} = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{dx^\mu}{dx} = \mu x^{\mu-1}$	$\frac{d\,\mathrm{arsinh}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{de^{f(x)}}{dx} = f'(x)\,e^{f(x)}$	$\frac{d\,\mathrm{arcosh}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d\ln\lvert f(x)\rvert}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{d\,\mathrm{artanh}\,x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$	$\frac{d\arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$