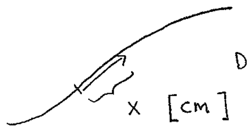
1. Einleitung [Lang & Pucker, Anhänge A und B]

Die Physik beschreibt Phänomene, die in einem Raum stattfinden. Um die Ereignisse zu charakterisieren, brauchen wir Koordinaten (d.h. eine Karte). Falls die Koordinaten kontinuierlich sind, besitzt der Raum u.a.:

* eine Dimension, d.h. Zahl der unabhängigen Koordinaten.
Zum Beispiel:

(i) ein dünner Draht

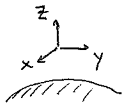


Dimension = 1

(ii) eine Oberfläche

(x,y) Dimension = 2

(iii) die Atmosphäre



$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Dimension = 3

(auch $\vec{x}$; $\vec{r}$ usw)

* eine Topologie, z.B.

(i) zusammenhängend

(ii) einfach zusammenhängend

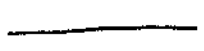
* eine Größe, z.B.

(i) endlich: $\max(\underbrace{d(\vec{x},\vec{y})}_{\text{Distanz von } \vec{x} \text{ und } \vec{y}}) < \infty$

(ii) unendlich: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{für alle}}}{\forall}\ \delta > 0 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{existieren}}}{\exists}\ \vec{x},\vec{y}$ so dass $d(\vec{x},\vec{y}) > \delta$.

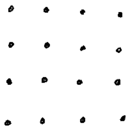
* möglicherweise Oberflächen, z.B.


$x \in [x_a, x_b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid x_a \leq x \leq x_b \}$ ⇒ ja!


$x \in\,]x_a, x_b[\, := \{ x \in \mathbb{R} \mid x_a < x < x_b \}$ ⇒ nein!


⇒ nein!

Die Koordinaten brauchen aber nicht unbedingt kontinuierlich zu sein: ein Gitter:



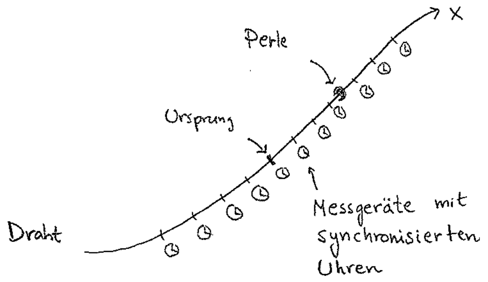
(z.B. ein Kristall).

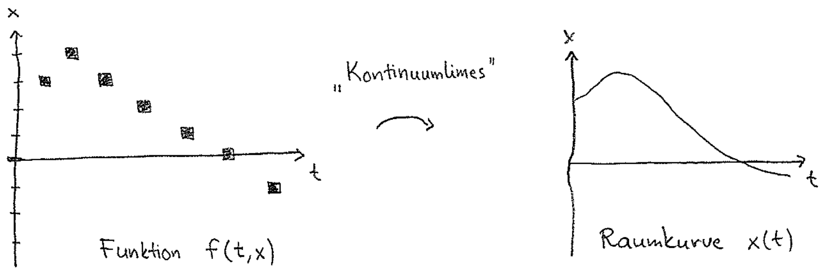
In unserem Raum sind verschiedene **physikalische Objekte** zu finden. In der klassischen Physik sind diese entweder **Massenpunkte** (z.B. Sauerstoffmoleküle) oder **Felder** (z.B. Temperatur, elektrisches Feld).

Mathematisch werden die Objekte durch **Funktionen**, d.h. Abbildungen vom Raum auf messbare Größen, dargestellt. Hier ist zu verstehen, dass auch die **Zeit** (oft mit „t" bezeichnet) als **Koordinate** betrachtet werden kann.

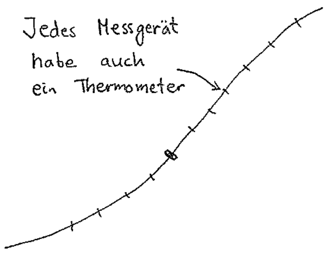
Massenpunkte: „messbar" ist, ob der da ist oder nicht!

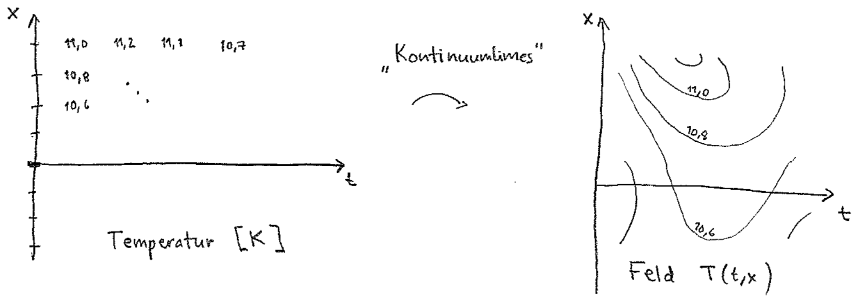
Sei $f = 1 =$ „■" falls da ; $f = 0 =$ „□" falls nicht.





Felder: messbar ist zum Beispiel die Temperatur für alle t, x:





Die Messwerte können verschiedenen Zahlenmengen zugehören, z.B.

$f \in \{0,1\}$ (wie oben)

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ (Zahl der Moleküle in mm^3)

$\mathbb{Z} = \{0,+1,-1,+2,-2,\dots\}$ (Gesamtladung in Einheiten von Elektronladung in mm^3)

$\mathbb{Q} = \{p/q,\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ (Bruchteil der Ferromagnete, die nach oben zeigen)

$\mathbb{R} = \{\text{reelle Zahlen}\}$ (Temperatur)

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ (elektrisches Feld)

$\mathbb{C} = \{\text{komplexe Zahlen}\}$ (Vielleicht etwas in der QuantenMechanik)

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Physikalische Betrachtungen führen uns also zum Studium von Funktionen.

Vorerst: reelle Funktionen , $f: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Raum- bzw. Zeitkoordinate}}}{\mathbb{R}} \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Messwert}}}{\mathbb{R}}$.

Elementare reelle Funktionen:

* Polynom :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\overset{\text{Grad}}{m}} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{m-fache} \\ \text{Summe}}}{+ \ldots +} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Potenz: m-fache} \\ \text{Multiplikation}}}{a_n x^m}$$

Aber auch: $f(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n (x-x_0)^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

* Komposition bzw. Hintereinanderausführung zweier Funktionen :

$(g \circ f)(x) := g(f(x))$ „ g nach f "

Zum Beispiel: $f(x) = x - x_0$, $g(x) = b_n x^n$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = b_n (x-x_0)^n$.

* Umkehrfunktion : falls die Gleichung $y = f(x)$ als $x = g(y)$ gelöst werden kann, nennen wir g die Umkehrfunktion zu f.

Bezeichnung üblicherweise: f^{-1} [nicht verwechseln mit $\frac{1}{f}$!]

Bemerkung: $y = f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y)$

$\Rightarrow f \circ g = \mathbb{1} :=$ Identität .

Aber auch:

$x = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$\Rightarrow g \circ f = \mathbb{1}$

Beispiele: (i) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto 2x^2$ hat Umkehrfunktion :

$y = 2x^2$ $\frac{y}{2} = x^2$ $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$

$\Rightarrow f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}}$

↳ ob wir die Variable x oder y nennen, spielt keine Rolle

(ii) $f(x) = x^m \Rightarrow \exists\, f^{-1}(x) =: \sqrt[m]{x} = x^{1/m}$ für $x > 0$.

(iii) eine allgemeine Potenz : $x^{n/m} = (x^{1/m})^n = (x^n)^{1/m}$

Wir können sogar x^μ, $\mu \in \mathbb{R}$, definieren, und damit den letzten drei Gleichungen eine Bedeutung geben.

↳ nächste Seite & Aufgabe 2.4.

Weitere elementare Funktionen können durch unendliche Reihen definiert werden.
Insbesondere: $f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ mit $a_n := \frac{1}{n!} := \frac{1}{n(n-1)\cdots 1}$ und $m \to \infty$ ergibt die Exponentialfunktion:

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad ; \; e := \exp(1) \approx 2{,}718\ldots \quad ; \; 0! := 1.$$

Diese Darstellung konvergiert, erstaunlicherweise, für $\forall\, x$; z.B.

$$\begin{aligned} \exp(-10) &= 1 - 10 + \tfrac{1}{2}\cdot 100 - \tfrac{1}{6}\cdot 1000 + \tfrac{1}{24}\cdot 10000 - \ldots \\ &= 1 - 10 + 50 - 166{,}7 + 416{,}7 + \ldots \\ &\approx 0{,}0000453999 \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion von $\exp(x)$ wird mit $\ln(x)$ bezeichnet:

$$\exp(\ln(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+ \; ; \quad \ln(\exp(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \; ; \quad \underline{\ln e = 1}.$$

Reihendarstellung:

$$\ln(x) = \ln(1+x-1) = \ln(1-[1-x]) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-x)^n$$; konvergiert für $0 < x < 2$.

Weitere elementare Funktionen:

* Potenz $a^x := \exp(x \cdot \ln a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \ln^n a \, x^n \quad (a \neq 1)$

Dessen Umkehrfunktion ist $\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a}$

$\left[\Rightarrow \text{Beweis: } y = a^x \quad \Rightarrow \ln y = \ln(\exp(x \ln a)) = x \ln a \quad \Rightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} \right]$

Insbesondere: $e^x = \exp(x)$.

* Sinus Hyberbolicus $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Cosinus Hyberbolicus $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

Tangens Hyberbolicus $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh}(x)$, $\operatorname{arcosh}(x)$, $\operatorname{artanh}(x)$ (nur für bestimmte x)

(„Area Sinus Hyberb.")

* Sinus $\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Cosinus $\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

Tangens $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Umkehrfunktionen $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$ (nur für bestimmte x)

(„Arcus Sinus")

——— · ———