Einführung in die Methoden der theoretischen Physik I	**2. Klausur**	31.08.2010

Keine Hilfsmittel. 4 Punkte / Aufgabe. 6 Punkte reichen zur Note 4,0.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die ersten drei Terme der Maclaurin-Reihe der Funktion $\tanh x$, indem Sie die Identität $\frac{\mathrm{d}\tanh x}{\mathrm{d}x} = 1 - \tanh^2 x$ verwenden.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Integrale $I_a = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta\, \sin\theta}{p^2+q^2+2pq\cos\theta}$ und $I_b = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta\, \sin\theta}{(p^2+q^2+2pq\cos\theta)^2}$.
Verifizieren Sie, dass Ihre Ergebnisse symmetrisch unter $p \leftrightarrow q$ sind.

Aufgabe 3: Eine implizite Funktion $y(x)$, die durch die Gleichung $F(y,x) = C$ definiert wird, hat bekannterweise die Ableitung $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\partial_x F/\partial_y F$. Sei jetzt

$$F(y,x) := \int_0^y \mathrm{d}t\, \frac{\sin(xt)}{t} \ .$$

Welche Differenzialgleichung erfüllt $y(x)$? [D.h. bestimmen Sie $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ als Funktion von y, x.]

Aufgabe 4: Die Lösung einer linearen „Differenzengleichung“ zweiter Ordnung,

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = 0 \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

erfolgt in vieler Hinsicht genau wie bei einer linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Bedienen Sie sich des Ansatzes $y_n = r^n$, $r \in \mathbb{R}$, um eine charakteristische Gleichung für die allgemeine Lösung herzuleiten, und ermitteln Sie diese.

Aufgabe 5: Betrachtet wird eine lineare Abbildung P, welche die Basisvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ „permutiert“ :

$$P(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = (\vec{e}_y, \vec{e}_x, \vec{e}_z) \ .$$

Bestimmen Sie die entsprechende Matrix, sowie ihre Inverse und Determinante.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \ .$$

Kann aus den Letzteren eine orthonormierte Basis gebildet werden?

$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0$	$\frac{\mathrm{d}\sinh x}{\mathrm{d}x} = \cosh x$	$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$	$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$
$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$	$\frac{\mathrm{d}\cosh x}{\mathrm{d}x} = \sinh x$	$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x$	$\det(AB) = \det(A)\det(B)$
$\frac{\mathrm{d}\ln\lvert x\rvert}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$	$\frac{\mathrm{d}\tanh x}{\mathrm{d}x} = 1-\tanh^2 x$	$\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x} = 1+\tan^2 x$	$(AB)^T = B^T A^T$
$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}x} = \mu\, x^{\mu-1}$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arsinh}\, x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$\frac{\mathrm{d}\exp\phi(x)}{\mathrm{d}x} = \phi'(x)e^{\phi(x)}$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arcosh}\, x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{\mathrm{d}\arccos x}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$
$\frac{\mathrm{d}\ln\lvert\phi(x)\rvert}{\mathrm{d}x} = \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{artanh}\, x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-x^2}$	$\frac{\mathrm{d}\arctan x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$	$\ln(\det(B)) = \mathrm{Sp}(\ln(B))$