

Keine Hilfsmittel. 4 Punkte / Aufgabe. 6 Punkte reichen zur Note 4,0.

Aufgabe 1: Ein System habe zwei Zustände, jeweils mit Wahrscheinlichkeiten $p_1 = x$, $p_2 = 1 - x$, wobei $0 \leq x \leq 1$ gilt. Bestimmen Sie die Werte von x die die Funktion $S(x) := -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2$ maximieren/minimieren.

Aufgabe 2: Die Kurven $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x$ werden um die x -Achse gedreht. Bestimmen Sie das zwischen den zwei Drehoberflächen bleibende Volumen. [Bitte skizzieren!]

Aufgabe 3: Ein Thermometer, das die Innentemperatur $T = 300$ K anzeigt, wird nach draussen gebracht, wo die Temperatur gleich $T_0 = 270$ K ist. Die aufgezeigte Temperatur erfüllt die Differenzialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0).$$

Nach drei Minuten wird die Temperatur 280 K gemessen. Bestimmen Sie den Wert von k . [Hinweis: Führen Sie zuerst die Substitution $y = T - T_0$ durch.]

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$x^2 y'' + x y' - y = 0.$$

[Hinweis: Führen Sie zuerst die Substitution $u = \ln x$ durch.]

Aufgabe 5: Sei A eine allgemeine antisymmetrische 3×3 -Matrix. Zeigen Sie, dass unbedingt $\det A = 0$ gilt. Gilt dasselbe auch für eine antisymmetrische 2×2 -Matrix?

Aufgabe 6: Betrachtet wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von A .
- (b) Diagonalisieren Sie A , d.h. schreiben Sie A als $A = P \Lambda P^{-1}$, wobei Λ eine diagonale Matrix ist.

$\frac{dc}{dx} = 0$	$\frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x$	$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$	$\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$
$\frac{de^x}{dx} = e^x$	$\frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x$	$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$	$\det(AB) = \det(A) \det(B)$
$\frac{d \ln x }{dx} = \frac{1}{x}$	$\frac{d \tanh x}{dx} = 1 - \tanh^2 x$	$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x$	$(AB)^T = B^T A^T$
$\frac{dx^\mu}{dx} = \mu x^{\mu-1}$	$\frac{d \operatorname{arsinh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
$\frac{d \exp \phi(x)}{dx} = \phi'(x) e^{\phi(x)}$	$\frac{d \operatorname{arcosh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\det(\exp(A)) = \exp(\text{Sp}(A))$
$\frac{d \ln \phi(x) }{dx} = \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$	$\frac{d \operatorname{artanh} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$	$\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$	$\ln(\det(B)) = \text{Sp}(\ln(B))$