Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 14**	25.01.2010

[Abgabe 01.02. in H16 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 1: Hauptachsentransformation. Skizzieren Sie die Lösung der (impliziten) Gleichung

$$x^2 - y^2 - 4xy = 1 \ ,$$

indem Sie die entsprechende quadratische Form diagonalisieren (6 Punkte).

Aufgabe 2: Diagonalisierung. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \ .$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von A (2 Punkte).

(b) Verifizieren Sie, dass die Eigenvektoren eine orthonormierte Basis bilden (2 Punkte).

(c) Diagonalisieren Sie A, d.h. schreiben Sie A als $A = P\,\Lambda\,P^{-1}$, wobei Λ eine diagonale Matrix ist (2 Punkte).

Aufgabe 3: Satz von Cayley und Hamilton. Wir betrachten die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom den Ausdruck $P_n(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda + 1$ hat (2 Punkte).

(b) Verifizieren Sie, dass B ihre Säkulargleichung erfüllt, d.h. dass $P_n(B) = 0_{n\times n}$ gilt (4 Punkte).

Aufgabe 4: Exponentialfunktion. Sei $M = \exp(\sigma_1 \theta)$, wobei σ_1 die erste Pauli-Matrix ist, d.h.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Zeigen Sie, dass M als

$$M = \mathbb{1} \cosh\theta + \sigma_1 \sinh\theta$$

geschrieben werden kann (6 Punkte).

Zusatzaufgabe. Seien A, B zwei Matrizen. Zeigen Sie, dass für $t \in \mathbb{R}$ Folgendes gilt:

$$e^{tA}\,B\,e^{-tA} = B + t\,[A,B] + \frac{t^2}{2!}\,[A,[A,B]] \dots \ ,$$

wobei [,] einen Kommutator bezeichnet, vgl. Aufgabe 10.4.