Abgabe 18.01. in H16 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Gauß-Jordan-Algorithmus. Bestimmen Sie die Inverse der 2×2 -Matrix M,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

mittels des Gauß-Jordan-Algorithmus (6 Punkte).

Aufgabe 2: Inverse Matrix. Ermitteln Sie die Inverse der Matrix

$$M = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) ,$$

und überprüfen Sie das Ergebnis durch die Berechnung der Matrix $M\,M^{-1}$ (6 Punkte).

Aufgabe 3: Lineare Gleichungssysteme. Ermitteln Sie die Lösungen (d.h. x,y,z) des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 (6 Punkte).

Aufgabe 4: Quadratische Formen. Ein sogenanntes Gaußsches Integral,

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-a x^2 + 2bx} \,, \quad a > 0 \,,$$

kann durch die Substitution x=y+b/a vereinfacht werden. Wir verallgemeinern das Argument der Exponentialfunktion zu

$$\phi(x) := -x^T A x + x^T b + b^T x ,$$

wobei A eine reguläre und symmetrische $n \times n$ -Matrix ist, und x, b Spaltenvektoren bezeichnen (die Struktur $x^T A x$ wird "quadratische Form"genannt).

- (a) Zeigen Sie, dass A^{-1} ebenfalls symmetrisch ist, d.h. die Gleichung $(A^{-1})^T = A^{-1}$ erfüllt (2 Punkte). [Hinweis: Betrachten Sie das Produkt $(A^{-1})^T A$.]
- (b) Ermitteln Sie einen Spaltenvektor c, so dass nach der Substitution x=y+c keine Terme linear in y übrig bleiben (2 Punkte). [Antwort: $c=A^{-1}b$.]
- (c) Ermitteln Sie ebenfalls die Form der Funktion ϕ , nachdem die Variable x durch y ersetzt worden ist (2 Punkte). [Antwort: $\phi = -y^TAy + b^TA^{-1}b$.]