

[Abgabe 11.01. in H16 vor der Vorlesung]

Aufgabe 1: Verschiedene Arten von Matrizen. Ermitteln Sie die allgemeinste reelle 2×2 -Matrix M ,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

mit der folgenden Eigenschaft:

- (a) M sei symmetrisch, d.h. $M^T = M$ (1 Punkt);
- (b) M sei antisymmetrisch, d.h. $M^T = -M$ (1 Punkt);
- (c) M sei spurlos, d.h. $\text{Sp } M = 0$ (1 Punkt);
- (d) M habe verschwindende Determinante, d.h. $\det M = 0$ (1 Punkt);
- (e) M sei orthogonal, d.h. $M^T M = \mathbb{1}$ (2 Punkte).

Aufgabe 2: Orthogonale Matrix.

- (a) In der Vorlesung wurde eine orthogonale Matrix, sei es O , durch die Gleichung $O^T O = \mathbb{1}$ definiert. Zeigen Sie, dass eine orthogonale Matrix die Gleichung

$$O O^T = \mathbb{1}$$

ebenfalls erfüllt (3 Punkte). [Hinweis: Sei $w = Ov$. Zeigen Sie zuerst, dass v als $v = O^T w$ ausgedrückt werden kann.]

- (b) In der Aufgabe 10.3 wurde eine zweidimensionale Drehmatrix betrachtet,

$$D := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass diese die Gleichungen $D^T D = D D^T = \mathbb{1}$ erfüllt (3 Punkte).

Aufgabe 3: Allgemeine Eigenschaften von Determinanten. Seien A, B 2×2 -Matrizen. Verifizieren Sie durch explizite Berechnung die folgenden Identitäten:

- (a) $\det A^T = \det A$ (1 Punkt).
- (b) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ (3 Punkte).

Sei O eine allgemeine orthogonale Matrix. Verifizieren Sie die Gültigkeit der folgenden Identität:

- (c) $|\det O| = 1$ (2 Punkte).

Aufgabe 4: Explizite Evaluationen von Determinanten. Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen (jeweils 2 Punkte):

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$