Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 09**	07.12.2009

[Abgabe 14.12. in H16 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 1: Lineare Differenzialgleichungen mit inhomogenen Termen. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender linearen Differenzialgleichungen:

(a) $y'' - 2y' + y = e^{-x}$ (2 Punkte). [Antwort: $C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{4}\, e^{-x}$.]

(b) $y'' - 2y' + y = e^{x}$ (2 Punkte). [Antwort: $C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2}\, x^2 e^{x}$.]

(c) $y''+y = \frac{1}{\sin x}$ (2 Punkte). [Antwort: $C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x \ln|\sin x| - x\cos x$. Hinweis: Konstanten variieren, oder die entsprechenden Formeln aus der Vorlesung benutzen!]

Aufgabe 2: Gedämpfte Schwingungen. In der Kosmologie spielt die folgende Gleichung eine wichtige Rolle:

$$\ddot{\varphi}(t) + 3H\dot{\varphi}(t) + m^2\varphi(t) = 0 \ .$$

(a) Sei zuerst H eine Konstante, $H := 2/(3t_0)$, $t_0 > 0$. Für welche m (sei $m > 0$) gibt es Lösungen mit Schwingungen (2 Punkte)?

(b) Sei jetzt H eine Funktion der Zeit, $H := 2/(3t)$, $t > 0$. Führen Sie die Substitution $\varphi = \chi/t$ durch; welche DG erfüllt χ? Für welche m gibt es Schwingungen (2 Punkte)?

(c) Wir betrachten Lösungen mit den Anfangsbedingungen $\varphi(t_0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(t_0) = 0$. Skizzieren Sie das Verhalten der schwingenden Lösungen in beiden Fällen (2 Punkte).

Aufgabe 3: Resonante Schwingungen. Ein ungedämpfter harmonischer Oszillator wird durch eine äußere Kraft getrieben,

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = E\sin(\omega t) \ .$$

(a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung für den Fall $\omega \neq \omega_0$ (2 Punkte).

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung für den Fall $\omega = \omega_0$ (2 Punkte).

(c) Skizzieren Sie die Letztere für die Anfangsbedingungen $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ (2 Punkte).

Aufgabe 4: Nichtlineare DG zweiter Ordnung als separierbare DG erster Ordnung. Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1+y^2} \ .$$

(a) Eine neue abhängige Variable wird als $z = y'$ definiert. Leiten Sie eine DG für z her, und ermitteln Sie z als Funktion von y (2 Punkte). [Antwort: $z(y) = C_1(1+y^2)$.]

(b) Bestimmen Sie die entsprechende $y(x)$ (2 Punkte). [Antwort: $y(x) = \tan(C_1 x + C_2)$.]

(b) Fixieren Sie die Integrationskonstanten C_1, C_2 durch die Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = 4$ (2 Punkte).

[Bitte bemerken Sie, dass die Integrationskonstanten im nichtlinearen Fall anders auftauchen als im linearen Fall, vgl. Aufgabe 1. Ihre Anzahl bleibt aber unverändert.]