Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 07**	23.11.2009

[Abgabe 30.11. in H16 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 1: Substitution der Variablen. Berechnen Sie Folgendes (jeweils 1 Punkt):

(a) $\int_0^1 \mathrm{d}x\,\sqrt{1-x^2}$ durch $x = \sin t$;

(b) $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x}$ durch $x = -\ln(t)$;

(c) $\int^x \frac{\mathrm{d}y\, y}{1+y^4}$ durch $y^2 = t$;

(d) $\int^x \frac{\mathrm{d}y}{e^y + e^{-y}}$ durch $e^y = t$;

(e) $\int^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(1-y)}}$ durch $y = \frac{1}{1+t^2}$;

(f) $\int^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(1+y)}}$ durch $y = t^2$.

Aufgabe 2: Partielle Integration.

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale: $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, x^2 \ln x$, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, x^2 \sinh x$ (2 Punkte).

(b) Berechnen Sie $I_n := \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{2n+1} e^{-ax^2}$, mit $a > 0$ und $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ (2 Punkte).
[Hinweis: Leiten Sie eine Rekursionsgleichung her, und bestimmen Sie I_0 explizit.]

(c) Es seien $d > 0$, $m > 0$, $E := \sqrt{m^2 + p^2}$. Verifizieren Sie die folgende Identität: $\int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^{d-1} \ln(1 - e^{-\beta E}) = \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^{d-1} \Big(-\frac{p^2 \beta}{dE}\Big) \frac{1}{e^{\beta E} - 1}$ (2 Punkte).

Aufgabe 3: Partialbruchzerlegung.

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale (jeweils $1\frac{1}{2}$ Punkte):

$$\int^x \frac{\mathrm{d}y}{y(1+y)^3}\,, \quad \int^x \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + y - 2}\,, \quad \int^x \mathrm{d}y\, \frac{1 - 2y - y^2}{1 + y + y^2 + y^3}\,.$$

(b) Drücken Sie das Integral $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^2-1} e^{b(1-y)}$, $a > 1$, $b > 0$, mit Hilfe der speziellen Funktion $E_1(x) := \int_x^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y} e^{-y}$ aus ($1\frac{1}{2}$ Punkte).

Aufgabe 4: Andere Integrationsmethoden.

(a) **Ableitung nach Parameter.** Berechnen Sie das Integral $I(r) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\pi} \frac{1 - \cos(zr)}{z^2}$, indem Sie $I'(r)$ mit Hilfe des Integrals $\int_0^\infty \mathrm{d}z\, \frac{\sin z}{z} = \frac{\pi}{2}$ bestimmen (2 Punkte).

(b) **Reihenentwicklung.** Die spezielle Funktion $\mathrm{Li}_2(x) := -\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{y} \ln(1-y)$, $0 < x < 1$, kann nicht explizit integriert werden. Bestimmen Sie ihre MacLaurin-Reihe (2 Punkte).

(c) **Alternative zur Partialbruchzerlegung.** In der Partialbruchzerlegung wird ein Integrand als $\frac{1}{uv} = \frac{1}{u+v}\big(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\big)$ oder $\frac{1}{uv} = \frac{1}{v-u}\big(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\big)$ dargestellt. Manchmal ist es aber günstiger, eine neue Integrationsvariable einzuführen und den Integrand als

$$\frac{1}{uv} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{[tu + (1-t)v]^2}$$

auszudrücken. Verifizieren Sie die Richtigkeit dieser Formel (2 Punkte).