Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 06**	16.11.2009

[Abgabe 23.11. in H16 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 1: Unbestimmte Integrale. Verifizieren Sie Folgendes (jeweils 1 Punkt):

(a) $\int^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|$;

(b) $\int^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 \pm 1}} = -\ln|x - \sqrt{x^2 \pm 1}|$;

(c) $\int^x \frac{\mathrm{d}y}{\sin^2 y} = -\frac{1}{\tan x}$;

(d) $\int^x \frac{\mathrm{d}y}{\tan y} = \ln|\sin x|$;

(e) $\int^x \frac{2\,\mathrm{d}y}{1-y^4} = \arctan x + \operatorname{artanh} x$;

(f) $\int^x \frac{2y\,\mathrm{d}y}{1-y^4} = \operatorname{artanh}(x^2)$.

Aufgabe 2: Geometrische Anwendungen bestimmter Integrale. Sei $f(x)$, $x \in]a,b[$, eine positive differenzierbare Funktion. Wir betrachten die Raumkurve $y = f(x)$ in der (x,y)-Ebene.

(a) Zeigen Sie, ausgehend vom Satz von Pythagoras, dass die Länge der Raumkurve durch $L = \int_a^b \mathrm{d}x \, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ gegeben wird (2 Punkte).

(b) Die Raumkurve drehe einen vollen Winkel um die x-Achse. Zeigen Sie, dass die damit erzeugte Oberfläche die Fläche $A = 2\pi \int_a^b \mathrm{d}x \, f(x) \, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ hat (2 Punkte).

(c) Zeigen Sie, dass das eingeschlossene Volumen $V = \pi \int_a^b \mathrm{d}x \, [f(x)]^2$ beträgt (2 Punkte).

Hinweis: L, A und V sind Funktionen von b; betrachten Sie eine kleine Änderung $b \to b + \Delta b$.

Aufgabe 3: Bestimmte Integrale.

(a) Berechnen Sie L, A sowie V aus Aufgabe 2 für den Fall $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $a = 0$, $b = r$, wobei $r > 0$ angenommen wird (3 Punkte).

(b) Berechnen Sie das Integral $I_b = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta \, \sin\theta}{p^2 + q^2 + 2pq\cos\theta}$.

Für welche p, q ist das Integral wohldefiniert ($1\frac{1}{2}$ Punkte)?

(c) Berechnen Sie das Integral $I_c = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x \, e^{-bx} \sinh(ax)$.

Für welche a, b ist das Integral wohldefiniert ($1\frac{1}{2}$ Punkte)?

Aufgabe 4: Uneigentliche Integrale. Die Schwerkraft hat die Form $F(r) = mg(R/r)^2$, $g \approx 9.8$ m/s^2, $R \approx 6400$ km, wobei m die Masse eines Körpers und r den Abstand vom Erdmittelpunkt bezeichnen.

(a) Bestimmen Sie die potentielle Energie $V(r) := -\int_r^\infty \mathrm{d}\rho \, F(\rho)$ (2 Punkte).

(b) Welche Geschwindigkeit braucht der Körper, um aus dem Schwerkraftfeld der Erde entkommen zu können (2 Punkte)? [Hinweis: die Bedingung ist $\frac{1}{2}mv^2 + V(R) > 0$.]

(c) Wenn es nur zwei Raumdimensionen gäbe, wäre die Schwerkraft der Form $F(r) = mgR/r$. Was wäre die Antwort auf Aufgabe (b) in diesem Fall (2 Punkte)?