Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 05**	09.11.2009

[Abgabe 16.11. in H16 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 1: Taylor-Formel. In der Vorlesung wurde die Taylor-Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

hergeleitet, wobei $x_0 \in]a, x[$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass die Taylor-Formel sich nach n-facher Ableitung zum normalen Mittelwertsatz reduziert (2 Punkte).

(b) Die Funktion f benehme sich in der Umgebung von $x = a$ als $(x-a)^m$, mit $m \in \mathbb{Z}$. Für welche m verschwindet das Restglied wenn $n \to \infty$ genommen wird (2 Punkte)?

(c) Die Funktion f sei proportional zu x^μ, mit $x \in \mathbb{R}_+, \mu \in \mathbb{R}$, und wir wollen f durch ein Taylor-Polynom des Grads $n \gg \mu$ im Intervall $x \in]x_1, x_2[$ beschreiben. Wie sollte der Entwicklungspunkt a gewählt werden, um den Betrag des Restglieds zu minimieren (2 Punkte)?

Aufgabe 2: Näherung durch ein Polynom. Nähern Sie die Funktion $\cos(x)$ durch ein Polynom des zweiten Grads, $P_2(x)$, indem Sie

(a) bei $x = 0$ die Ableitungen $P_2^{(n)}$, $n = 0{-}2$, denjenigen von $\cos(x)$ gleichsetzen (2 Punkte);

(b) die Werte der Funktionen $P_2(x)$ und $\cos(x)$ bei $x = 0, \pm\pi/2$ gleichsetzen (2 Punkte).

(c) Wie groß ist der Fehler bei $x = \pi/4$ in beiden Fällen (2 Punkte)?

Aufgabe 3: Taylor-Entwicklung. In der relativistischen Mechanik kann die Energie eines Massenpunktes als

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} ,$$

ausgedrückt werden, wobei m, c und p die Masse, die Lichtgeschwindigkeit, und den Impuls bezeichnen. Die Geschwindigkeit kann durch $v = \mathrm{d}E/\mathrm{d}p$ bestimmt werden.

(a) Drücken Sie E als Funktion der Geschwindigkeit aus, d.h. als $E(v)$ (2 Punkte).

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von $E(v)$ um den Punkt $v = 0$ (2 Punkte).

(c) Für ultrarelativistische Teilchen ($v \approx c$) ist es günstig, eine Reihenentwicklung in der Variable mc/p statt v/c zu benutzen. Bestimmen Sie diese Entwicklung (2 Punkte).

Aufgabe 4: MacLaurin-Reihe der Umkehrfunktion. In der Vorlesung wurde die MacLaurin-Reihe der Funktion $\arctan(x)$ hergeleitet:

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} .$$

Bestimmen Sie die sechs ersten Terme der MacLaurin-Reihe der Funktion $\tan(x)$, d.h. $c_0 - c_5$ in der Darstellung

$$\tan(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots , \quad |x| < \frac{\pi}{2} ,$$

durch Betrachtung der definierenden Beziehung $\arctan(\tan(x)) = x$ (6 Punkte).