Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 03**	26.10.2009

[Abgabe 02.11. in H16 *vor* der Vorlesung]

Die Übungsgruppe von Freitag 06.11.2009 um 10-12 Uhr findet ausnahmsweise im Seminarraum D3-203 statt. Die Übungsgruppen von Dienstag im T2-137 sowie Mittwoch im E0-160 finden in der Zukunft im Raum D5-153 statt. Es gibt eine neue Übungsgruppe freitags um 08-10 Uhr im D01-112A.

Aufgabe 1: Komposition und Umkehrfunktion. Eine Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ wird als

$$f = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}\,, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases} \qquad \text{definiert .}$$

(a) Skizzieren Sie $f(x)$ und $f'(x)$. Für welche x ist die Letztere wohldefiniert? (2 Punkte)

(b) Skizzieren Sie die Kompositionen $(f \circ f)(x)$ und $(f \circ f \circ f)(x)$ (2 Punkte).

(c) Konstruieren Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,1] \to [\frac{1}{2}\,, 1]$ (2 Punkte).

Aufgabe 2: Grenzwerte. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 - c^2}) = 0$ (1 Punkt);

(b) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{x^n - c^n}{x - c} = nc^{n-1}$ (1 Punkt);

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right) = 0$ (1 Punkt);

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (1 Punkt);

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = 1$ (1 Punkt);

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ (1 Punkt).

Aufgabe 3: Ableitungen. Ausgehend von den bekannten Ableitungen von x^m, $\sin x$, $\tanh x$, und $\exp(x)$, von den Definitionen deren Umkehrfunktionen, sowie von der Formel $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)|_{x=f^{-1}(y)}$, bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}\,\sqrt[m]{x}}{\mathrm{d}x}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(b) $\dfrac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(c) $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{artanh}\,x}{\mathrm{d}x}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte);

(d) $\dfrac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x}$ ($1\frac{1}{2}$ Punkte).

Aufgabe 4: Stetigkeit und Differenzierbarkeit. In der relativistischen Thermodynamik spielt die folgende Funktion eine wichtige Rolle:

$$g(\tau) := \frac{\cosh[\beta/2 - (\tau \bmod \beta)]}{2\sinh(\beta/2)}\,, \quad \beta = \text{const}\,,$$

wobei $\tau \bmod \beta := \tau + n\beta$, mit $n \in \mathbb{Z}$ so gewählt dass $0 \le \tau + n\beta < \beta$ gilt.

(a) Skizzieren Sie $g(\tau)$ für $-2\beta \le \tau \le 2\beta$. Ist $g(\tau)$ stetig? Differenzierbar? (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie $\lim_{\tau\to 0^+} g'(\tau) - \lim_{\tau\to 0^-} g'(\tau)$ (2 Punkte).

(c) Die zweite Ableitung von $g(\tau)$ wird als $g''(\tau) := \mathrm{d}g'(\tau)/\mathrm{d}\tau$ definiert. Zeigen Sie, dass für $0 < \tau < \beta$ die folgende Gleichung gilt: $g''(\tau) = g(\tau)$ (2 Punkte).