Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 01**	12.10.2009

[Abgabe 19.10. in H16 *vor* der Vorlesung]

Dieses Blatt dient als Selbststudium/Wiederholung von verschiedenen Themen, wie sie z.B. im Vorkurs, `www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/vk09/`, präsentiert wurden. (Die Punkte aus diesem Blatt spielen für den Übungsschein keine Rolle.)

Aufgabe 1: Reihen. Bekanntlich kann, für $|r| < 1$, die Funktion $1/(1-r)$ als geometrische Reihe dargestellt werden, $1/(1-r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$. Bestimmen Sie, ausgehend von dieser Formel, die Reihendarstellung der Funktion $1/(1-r^{-1})$, mit $|r| < 1$ (2 Punkte). Skizzieren Sie auch die beiden Funktionen $1/(1-r)$ und $1/(1-r^{-1})$ für $0 < r < 1$ (1 Punkt).

Aufgabe 2: Taylor-Entwicklung. Entwickeln Sie die Funktion $f(r) := 1/(1-r)$ zur dritten Ordnung in der Taylor-Entwicklung um den Punkt $r = r_0 := 1/2$ (3 Punkte).

Aufgabe 3: Differenzierung. Nehmen Sie die erste Ableitung $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ aus den folgenden Funktionen:

$$(\pi x)^{\pi x}\ , \quad \frac{1}{\tanh(x)}\ , \quad \text{artanh}(x) \qquad \text{(3 Punkte)}\ .$$

Aufgabe 4: Integration. Integrieren Sie die Reihenentwicklung $1/(1-r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ auf beiden Seiten von 0 bis x, mit $0 < x < 1$, und präsentieren Sie das Ergebnis als Reihenentwicklung der Funktion $\ln(1-x)$ (3 Punkte).

Aufgabe 5: Komplexe Funktionen. Zeigen Sie, dass die Gleichung $y = \tan(z)$ formell durch

$$z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iy}{1-iy}$$

invertiert werden kann (2 Punkte). Was ist $\mathrm{d}z/\mathrm{d}y$ laut dieser Formel (1 Punkt)?

Aufgabe 6: Für $x, y > 0$ gilt die Beziehung

$$\ln \frac{x}{y} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big(e^{-yt} - e^{-xt} \Big)\ .$$

Verfizieren Sie die Gültigkeit, indem Sie beide Seiten bzgl. x und y differenzieren (3 Punkte).

Aufgabe 7: Die Riemannsche Zetafunktion wird als $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ definiert.

(a) Für welche s konvergiert die Summe (2 Punkte)?

(b) Zeigen Sie, durch Reihenentwicklung innerhalb des Integrals, dass $\zeta(s)$ als

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x\, x^{s-1}}{e^x - 1}\ , \quad \Gamma(s) := \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x^{s-1} e^{-x}$$

geschrieben werden kann (2 Punkte).

(c) Für welche s konvergieren die zwei Integrale (2 Punkte)?